

Att förstå och undervisa om proportionalitet

Peter Nyström

Mullsjö 20150615

Innehåll

- Vad är proportionalitet?
- Vilket centralt innehåll handlar om proportionalitet?
- Vad är begreppsförståelse?
- Hur bör vi undervisa om proportionalitetsbegreppet?

Tre utgångspunkter

- Begreppsförståelse (Usiskin, 2012)
- Ämnesplanen i matematik (och kursplaner)
- Forskning om proportionalitetsbegreppet
- Egna erfarenheter av strukturella likheter mellan olika innehåll i matematiken

Lesh, Post, & Behr, 1988

- “We view proportional reasoning as a pivotal concept. On the one hand, it is the capstone of children’s elementary school arithmetic; on the other hand, it is the cornerstone of all that is to follow.” (sid. 2)

Exempel 1 (Lesh, Post & Behr, 1988)

Sue can walk 15 miles in 5 hours.

Her ratio of miles per hour is:

- a. 5 to 15
- b. 10 to 5
- c. 3 to 1
- d. not given

Proportionella resonemang som hörnsten för algebra (Lesh, Post & Behr, 1988)

- Hur långt kan Sue gå på 3 timmar om hon går 15 miles på 5 timmar?
 - Teckna en ekvation som beskriver problemsituationen
 - Transformera den beskrivande formen av ekvationen till en beräkningsbar form
 - Beräkna genom att utföra de indikerade operationerna
- Proceduren beskriv – transformera – beräkna skiljer algebra från aritmetik

- Proportionella resonemang innehåller de allra viktigaste algebraiska aspekterna av förståelse som har att göra med likhet, variabler och transformationer.

Tourniaire & Pulos (1985)

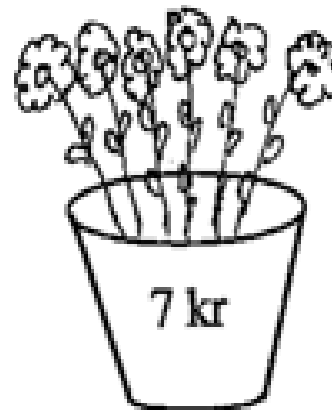
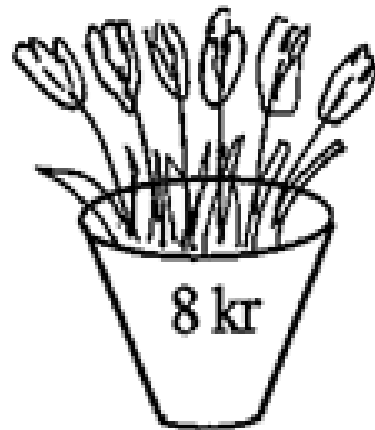
- For a mathematician, a proportion is a statement of equality of two ratios, i.e. $a/b=c/d$. Although most people are probably unaware of the mathematical definition of proportions, they do use them in familiar situations. Despite its importance in everyday situations, in the sciences, and in the educational system, the concept of proportions is difficult. It is acquired late (see, for example, Newton et al. 1981, or Pallrand, 1979). Moreover, many adults do not exhibit mastery of the concept (e.g. Capon and Kuhn 1979). (sid. 181)

VAD ÄR PROPORTIONALITET

Hur uppfattar du begreppet
proportionalitet?

Ge exempel på var proportionalitet
används och är viktigt att lära sig.

Eva ska ge bort en bukett blommor.
 Buketten kostar 148 kr. Hur många blommor
 köper hon av varje sort?
 (Grevholm, 1991)



*Allting som du gör är koncentrerat till mig
Du har blivit någon sorts mani
Och jag har så lätt att fascineras av dig
Du är kärlekens reguladetri*



Reguladetri [\[redigera\]](#) [\[redigera wikitext\]](#)

Regula de tri (av lat. regula de tribus 'regeln om tre', av regula här 'regel', de 'om' och tribus 'tre')^[1] förekom och användes redan under tidigt 500-tal^[2], då indiska matematiker använde räknesättet för att lösa matematiska proportionalitetsproblem. Termen togs bort i den svenska skolmatematiken på 1960-talet och nu använder man enbart just begreppet **proportionalitet**.

Korsmultiplikation (eller regula de tri) är en **algoritm** som ofta används för till exempel enhetsomvandlingar, vid beräkning av **rationella linjära ekvationer** och inom proportionsläran. Den beskriver hur man med tre kända variabler, a , b , c bestämmer den fjärde - d då de är proportionella. Proportionaliteten kan åskådliggöras på följande sätt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \left\{ a, b, c, d \neq 0 \right.$$

eller

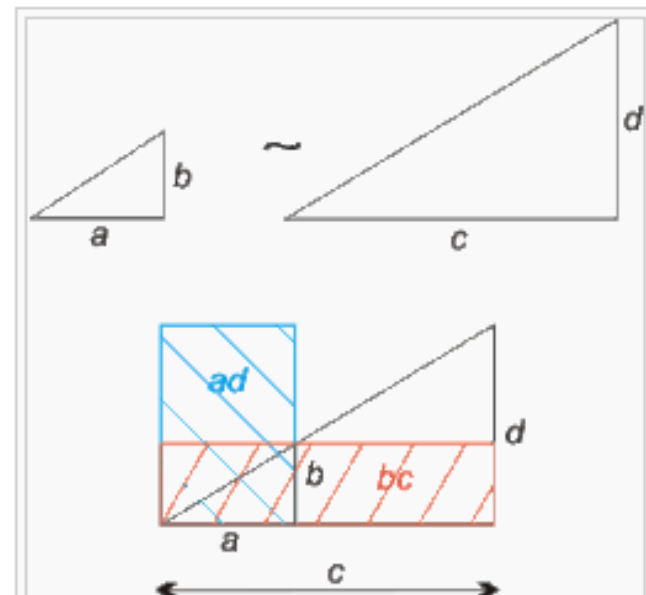
$a : b = c : d$ (utläses: a förhåller sig till b , som c förhåller sig till d .)

Enligt Reguladetri gäller att för en ekvation som ser ut på följande vis

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

där den eftersökta variabeln finnes i högerledets nämnare, löses variabeln ut genom

$$x = \frac{bc}{a}.$$



Definition

- En proportion är ett påstående att två kvoter är lika

Två grundläggande typer av problem (Lamon, 1999))

- Jämförelseproblem
 - *En lastbil kör 115 km på $1\frac{1}{2}$ timme och en bil med släpvagn kör 125 km på $1\frac{3}{4}$ timme. Vilken har högre medelhastighet?*
- Problem med saknade värden
 - *Tamara läser 14 sidor på 30 minuter. Hur många sidor kan hon då läsa på 15 minuter?*

PROPORTIONALITET I ÄMNESPLANEN

Finns det någon proportionalitet i
ämnesplanen i matematik?

”Proportionalitet” i ämnesplanen

- Begreppen förhållande och proportionalitet i resonemang, beräkningar, mätningar och konstruktioner. (1A)

Implicit proportionalitet

- Hantering av algebraiska uttryck och för karaktärsämnen relevanta formler samt metoder för att lösa linjära ekvationer.
- Geometriska begrepp valda utifrån karaktärsämnenas behov, till exempel skala, vektorer, likformighet, kongruens, sinus, cosinus, tangens och symmetrier.
- Fördjupning av procentbegreppet: promille, ppm och procentenheter.
- Begreppen sinus, cosinus och tangens och metoder för beräkning av vinklar och längder i rätvinkliga trianglar.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.



Zalman Usiskin (2012)

WHAT DOES IT MEAN TO UNDERSTAND SOME MATHEMATICS?

Usiskin (2012)

- To understand mathematics *as a whole* would entail a discussion of the roles mathematics plays in everyday personal affairs, in schooling (e.g., as a sorter), in occupations, in other fields such as physics, and in its existence as a discipline studied for its own sake. In contrast, this paper is primarily concerned with what it means to understand *some* mathematics, which generally means to begin with a bit of mathematics and to subject it to detailed analysis, usually from the perspective of the learning of that bit.

A person has full understanding of a mathematical concept if he or she can

- deal effectively with the skills and algorithms associated with the concept,
- with properties and mathematical justifications (proofs) involving the concept,
- with uses and applications of the concept,
- with representations and metaphors for the concept, and
- with the history of the concept and its treatment in different cultures.
- Although these aspects are obviously connected when attached to a particular concept, we call them *dimensions of understanding* because each aspect can be mastered relatively independently of the others. (Usiskin, 2012)

Olika dimensioner av förståelse

- **Färdighet - algoritm**
- **Egenskap-bevis**
- **Användning - Tillämpning**
- **Representation - Metafor**
- **Historia - Kultur**

Proportional reasoning

- The ability to recognize, to explain, to think about, to make conjectures about, to graph, to transform, to compare, to make judgements about, to represent, or to symbolize relationships of two simple types ... direct ... and inverse proportion. (Lamon, 1999)

A proportional thinker

- Has a sense of covariation, that is, they understand relationships in which two quantities vary together and are able to see how the variation in one coincides with the variation in another
- Can recognise proportional relationships as distinct from non-proportional relationships in real-world contexts
- Develops a wide variety of strategies for solving proportions or comparing ratios, most of which are based on informal strategies rather than prescribed algorithms
- Understands ratios as distinct entities representing a relationship different from the quantities they compare

**(HUR)BÖR VI UNDERVISA OM
PROPORTIONALITETSBEGREPPET?**

Research has shown that (van de Walle, 2007)

- Proportional reasoning is best developed in investigative problem solving lessons
- Students understand best when multiple strategies are shared and discussed
- Many of the most valuable activities to develop proportional reasoning do not involve solving proportions at all but rather reasoning about 'more' in everyday common situations
- Problems should start with high content, hands-on situations
- **Vad betyder det i din undervisning?**

Tre viktiga algebraiska "förståelser" som är relevanta för proportionalitetsresonemang

- Likhet
- Variabler
- Transformation och invarians

Förståelse av likhet

- Förståelse för proportionalitet måste sträcka sig längre än bara att två led i en ekvation är lika: det krävs en strukturell likhet
- Insikten om strukturell likhet tycks vara en avgörande komponent för att proportionella resonemang ska uppkomma.

Förståelse av variabler

- En variabel kan ha endast ett värde och ändå är symbolen en variabel
- Värdet för en symbol kan variera och ändå är symbolen en konstant.

Transformation och invarians

- Det är inte så enkelt som att allting är OK så länge du gör samma sak i båda leden i en ekvation
- $3/4 = 6/8$ $(3-1)/4 = (6-?)/8$
- Statiska och dynamiska samband
- Jfr Ohms lag: $U = R \cdot I$

Exempel 2

- Fred Finley began teaching 10 years ago in Centerville. He and his new bride rented an apartment at 3188 Main Street for \$250 per month. He also bought a new VW Rabbit for \$4500. His starting salary was \$14,000.
- This year, Fred's brother, Tom, also began teaching in Centerville...
- What should Tom's current starting salary be, so that it will be equivalent to Fred's salary from 10 years ago?

Diskutera

- Är begreppsförståelse samma sak som "begreppsförmåga"?
- Vad har elever med sig för begreppsförståelse när de kommer till dig?
- Hur vet du det?
- Kan proportionalitetsbegreppet hjälpa till att strukturera innehåll och göra kopplingar mellan till exempel skala, trigonometri, algebra och funktionslära?

Referenser

- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.
- Usiskin, Z. (2012). *What does it mean to understand some mathematics?* Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.