Area och volym hos Euklides och Hilberts tredje problem

Torbjörn Tambour

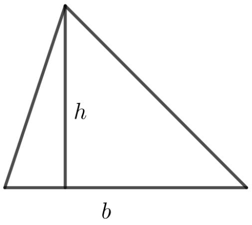
Mullsjö den 20 juni 2018

Inledning

Att arean av en triangel ges av formeln

$$A = \frac{b \cdot h}{2},$$

där b är (längden av) basen och h (längden av) höjden, känner säkert de flesta till.

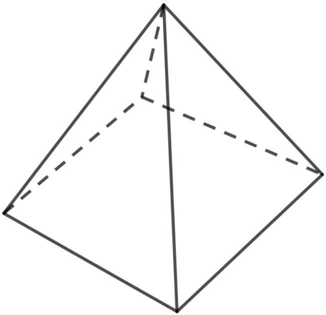


Inledning

Många känner också till formeln

$$V = \frac{B \cdot h}{3},$$

för volymen av en pyramid, där B är (arean av) basytan och h (längden av) höjden.



Inledning

Formlerna för triangelns area och pyramidens volym finns inte i Elementa.

Euklides använder överhuvudtaget inga numeriska storheter.

I själva verket utvecklar han inte vare sig något areabegrepp eller volymsbegrepp.

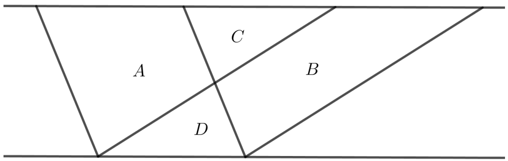
Många av satserna i Elementa handlar dock om jämförelser mellan areor av figurer och volymer av kroppar.

Euklides skriver i de satserna att en figur eller kropp är *lika med* en annan, men använder samma uttryck för det vi numera kallar *kongruens*.

Arean av en parallellogram

Sats 35 i Elementas bok I

Parallellogrammer som står på samma bas mellan samma parallella linjer är lika.

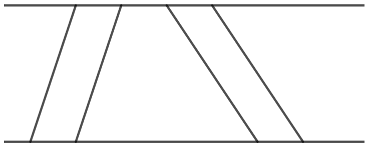


$$\begin{aligned} A + C &= B + C \quad \text{(kongruens)} \\ A + C + D &= B + C + D \\ A + D &= B + D \end{aligned}$$

Arean av en parallellogram

Sats 36 i Elementas bok I

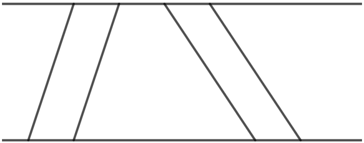
Parallellogrammer med samma bas som står mellan samma parallella linjer är lika.



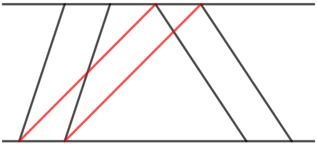
Arean av en parallellogram

Sats 36 i Elementas bok I

Parallellogrammer med samma bas som står mellan samma parallella linjer är lika.



Bevis:



Triangelns area

Sats 37 och 38 i Elementas bok I

Trianglar som står på samma bas mellan parallella linjer är lika.

Trianglar med samma bas som står mellan samma parallella linjer är lika.

Triangelns area

Sats 37 och 38 i Elementas bok I

Trianglar som står på samma bas mellan parallella linjer är lika.

Trianglar med samma bas som står mellan samma parallella linjer är lika.

I bevisen används att en parallellogram delas i två kongruenta trianglar av en diagonal.

Om vi ska vara riktigt petiga, så måste vi visa att om två parallellogrammer är lika, så gäller detsamma om motsvarade trianglar.

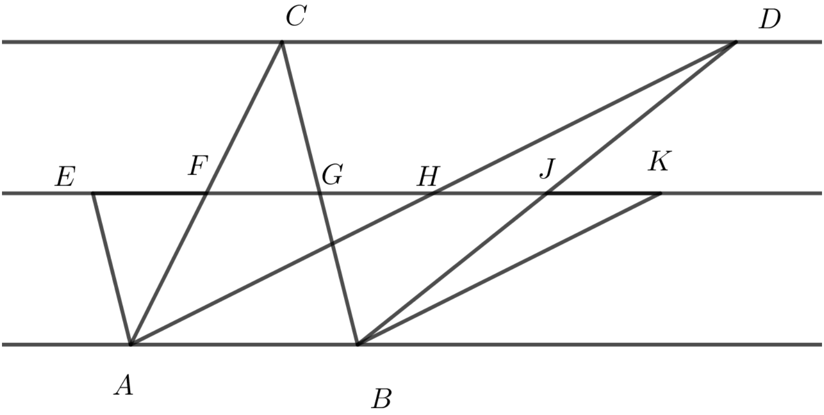
För oss är det naturligtvis fullständigt självklart, men frågan är om det följer ur de förutsättningar (axiom och postulat) som Euklides utgår från.

Triangelns area

Här är ett bevis för Sats 37 som inte använder resonemanget om en halv parallellogram.

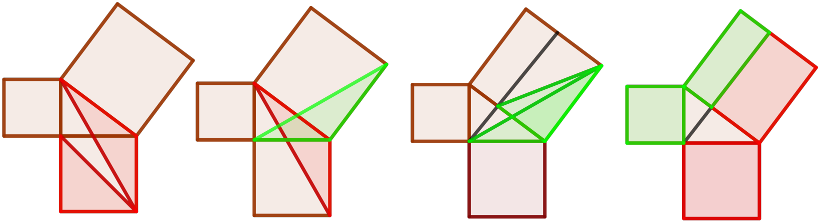
Trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ABD$ har gemensam bas AB och spetsarna ligger på linjen CD, som är parallell med AB. Linjen EK är parallell med AB och CD och har samma avstånd till dem. Drag AE parallell med BC och BK parallell med AD. Då är det lätt att se att $\triangle EAF$ och $\triangle CGF$ är kongruenta, liksom $\triangle BKJ$ och $\triangle DHJ$. Alltså är $\triangle ABC$ lika med parallellogrammen $ABGE$ och $\triangle ABD$ är lika med parallellogrammen $ABKH$. Påståendet följer nu av Sats 35.

Triangelns area



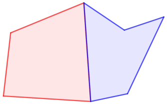
Pythagoras sats

I Euklides bevis för Pythagoras sats används Sats 38 om triangelns area.



Egenskaper hos Elementas implicita areabegrepp

1. Kongruenta figurer har samma area.
2. Arean av hela figuren nedan är summan av areorna av de två delarna.



3. Arean av ena delen är skillnaden mellan arean av hela figuren och den andra delen.
4. Om två figurer med samma area delas i hälfter, så har hälfterna samma area.
5. Det hela är större än delen.
6. Om två kvadrater har samma area, så är deras sidor lika långa.

Areabegreppet

En fråga som är svårare än man i förstone kanske tror är den här:

Hur ska vi gå tillväga för att skaffa sig ett areabegrepp?

Varför behöver vi *skaffa* oss ett areabegrepp? Vi vet ju mycket väl vad area är.

Areabegreppet

En fråga som är svårare än man i förstone kanske tror är den här:

Hur ska vi gå tillväga för att skaffa sig ett areabegrepp?

Varför behöver vi *skaffa* oss ett areabegrepp? Vi vet ju mycket väl vad area är.

Nja, vi har ett intuitivt eller vardagligt areabegrepp, men nu vill vi skaffa oss ett matematiskt begrepp som modellerar detta.

Areabegreppet

En fråga som är svårare än man i förstone kanske tror är den här:

Hur ska vi gå tillväga för att skaffa sig ett areabegrepp?

Varför behöver vi *skaffa* oss ett areabegrepp? Vi vet ju mycket väl vad area är.

Nja, vi har ett intuitivt eller vardagligt areabegrepp, men nu vill vi skaffa oss ett matematiskt begrepp som modellerar detta.

Om vi fortsätter att vara vardagsintuitiva, så skulle vi troligen gärna vilja att vårt begrepp area har egenskaperna på den förra bilden och att det skulle kunna tillämpas på alla figurer.

Areabegreppet

En fråga som är svårare än man i förstone kanske tror är den här:

Hur ska vi gå tillväga för att skaffa sig ett areabegrepp?

Varför behöver vi *skaffa* oss ett areabegrepp? Vi vet ju mycket väl vad area är.

Nja, vi har ett intuitivt eller vardagligt areabegrepp, men nu vill vi skaffa oss ett matematiskt begrepp som modellerar detta.

Om vi fortsätter att vara vardagsintuitiva, så skulle vi troligen gärna vilja att vårt begrepp area har egenskaperna på den förra bilden och att det skulle kunna tillämpas på alla figurer.

En matematisk undersökning visar dock att det inte är möjligt och slutsatsen är att vi måste analysera de andra begreppen noggrant, i synnerhet *figur*.

Tänkbara steg i införandet av ett areabegrepp

Tänkbara steg i införandet av ett areabegrepp

1. Bestäm vilka figurer vi ska arbeta med.

Tänkbara steg i införandet av ett areabegrepp

1. Bestäm vilka figurer vi ska arbeta med.
2. Definiera vad vi menar med arean av en sådan figur.

Tänkbara steg i införandet av ett areabegrepp

1. Bestäm vilka figurer vi ska arbeta med.
2. Definiera vad vi menar med arean av en sådan figur.
3. Visa att definitionen inte leder till motsägelser, till exempel att en figur får olika areor beroende på hur vi räknar.

Tänkbara steg i införandet av ett areabegrepp

1. Bestäm vilka figurer vi ska arbeta med.
2. Definiera vad vi menar med arean av en sådan figur.
3. Visa att definitionen inte leder till motsägelser, till exempel att en figur får olika areor beroende på hur vi räknar.
4. Visa att areabegreppet har de önskade egenskaperna.

Tänkbara steg i införandet av ett areabegrepp

1. Bestäm vilka figurer vi ska arbeta med.
2. Definiera vad vi menar med arean av en sådan figur.
3. Visa att definitionen inte leder till motsägelser, till exempel att en figur får olika areor beroende på hur vi räknar.
4. Visa att areabegreppet har de önskade egenskaperna.
5. Undersök vilka metoder som kan användas för att beräkna areor.

Tänkbara steg i införandet av ett areabegrepp

1. Bestäm vilka figurer vi ska arbeta med.
2. Definiera vad vi menar med arean av en sådan figur.
3. Visa att definitionen inte leder till motsägelser, till exempel att en figur får olika areor beroende på hur vi räknar.
4. Visa att areabegreppet har de önskade egenskaperna.
5. Undersök vilka metoder som kan användas för att beräkna areor.
6. Undersök om det går att utvidga areabegreppet till andra figurer.

Figurer

De enklaste figurerna i planet är polygoner och den enklaste polygonen är triangeln.

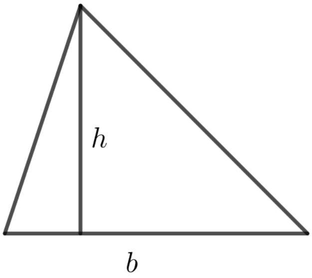
Varje polygon kan delas upp i trianglar, så det är troligen en bra idé att börja med att definiera arean av en triangel.

Därefter kan vi definiera arean av en polygon genom att dela upp den i trianglar och summera deras areor.

Triangelns area

Arean av en triangel med bas b och höjd h definieras (förstås) som

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$



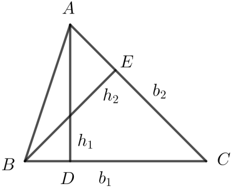
Triangelns area

Hur vet vi att arean given av formeln $A = bh/2$ inte beror på vilken sida i triangeln vi väljer som bas?

Triangelns area

Hur vet vi att arean given av formeln $A = bh/2$ inte beror på vilken sida i triangeln vi väljer som bas?

Trianglarna $\triangle ADC$ och $\triangle BEC$ är rätvinkliga och vinkeln vid hörnet C ingår i båda.



Enligt tredje likformighetsfallet är de likformiga, det vill säga

$$\frac{|BE|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|} \quad \text{eller} \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{b_1}{b_2},$$

vilket ger $b_1 h_1 = b_2 h_2$.

Arean av en polygon

För att definiera arean av en polygon, så delar vi in den i trianglar och lägger ihop deras areor.

För att detta ska vara en bra definition, så måste vi visa att resultatet är oberoende av *hur* vi delar in polygonen i trianglar, men det beviset hoppar vi över.

Areabegreppet igen

Utredningen ovan visar att det inte är någon särskilt enkel match att införa ett areabegrepp ens för en så enkel typ av figurer som polygoner.

Vi ska inte göra något försök att utvidga begreppet till andra figurer, till exempel cirklar, utan ska istället ta fasta på ett bevis vi såg tidigare för att två trianglar som står på samma bas och mellan parallella linjer ”är lika”, det vill säga har samma area.

Klipp- och pusselgeometri

Närmare bestämt ska vi visa att om två polygoner P och Q har samma area, så kan vi klippa P i bitar och pussla ihop dem så att vi får en polygon som är kongruent med Q. Vi gör detta i steg:

Klipp- och pusselgeometri

Närmare bestämt ska vi visa att om två polygoner P och Q har samma area, så kan vi klippa P i bitar och pussla ihop dem så att vi får en polygon som är kongruent med Q. Vi gör detta i steg:

1. Pussla om en triangel till en parallellogram.

Klipp- och pusselgeometri

Närmare bestämt ska vi visa att om två polygoner P och Q har samma area, så kan vi klippa P i bitar och pussla ihop dem så att vi får en polygon som är kongruent med Q. Vi gör detta i steg:

1. Pussla om en triangel till en parallellogram.
2. Pussla om en parallellogram till en rektangel.

Klipp- och pusselgeometri

Närmare bestämt ska vi visa att om två polygoner P och Q har samma area, så kan vi klippa P i bitar och pussla ihop dem så att vi får en polygon som är kongruent med Q. Vi gör detta i steg:

1. Pussla om en triangel till en parallellogram.
2. Pussla om en parallellogram till en rektangel.
3. Pussla om en rektangel till en annan rektangel med given sida.

Klipp- och pusselgeometri

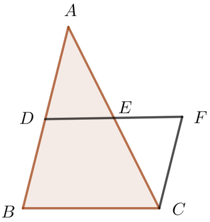
Närmare bestämt ska vi visa att om två polygoner P och Q har samma area, så kan vi klippa P i bitar och pussla ihop dem så att vi får en polygon som är kongruent med Q. Vi gör detta i steg:

1. Pussla om en triangel till en parallellogram.
2. Pussla om en parallellogram till en rektangel.
3. Pussla om en rektangel till en annan rektangel med given sida.

Nu kan vi pussla om både P och Q till rektanglar i vilka en sida är 1 längdenhet och vi är klara eftersom de har samma area.

Triangel till parallellogram

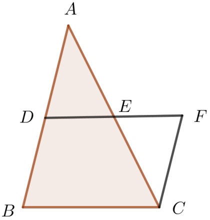
I figuren är D och E mittpunkterna på AB respektive AC, vilket medför att DE är parallell med BC.



Drag en linje genom C parallellt med AB och låt F vara dess skärningspunkt med förlängningen av DE. Då är $BCFD$ en parallellogram.

Triangel till parallellogram

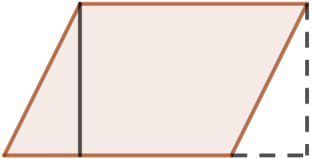
Enligt alternatvinkelsatsen är $\angle DAE$ och $\angle ECF$ lika stora. Vinklarna $\angle DEA$ och $\angle FEC$ är vertikalvinklar och således också lika stora. Eftersom E är mittpunkten på AC, så är AE och EC lika långa.



Enligt tredje kongruensfallet är $\triangle ADE$ och $\triangle CFE$ kongruenta. Om vi därför klipper av toppen $\triangle ADE$ och lägger den som $\triangle CFE$, så får vi en parallellogram $BCFD$ med samma area som $\triangle ABC$.

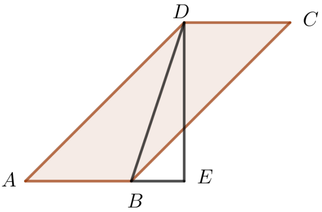
Parallellogram till rektangel

Om höjden från ett av hörnen faller på motstående sida, så är det enkelt:



Parallellogram till rektangel

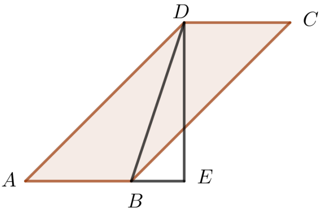
För att hantera fallet då höjden faller utanför motstående sida



så noterar vi att $\wedge ABD$ är trubbig eftersom den är yttervinkel till den rätvinkliga triangeln $\triangle BED$. Alltså är $\wedge ADB$ spetsig.

Parallellogram till rektangel

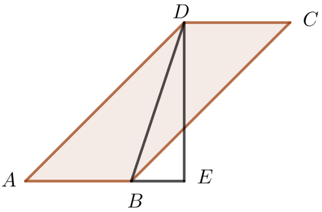
För att hantera fallet då höjden faller utanför motstående sida



så noterar vi att $\angle ABD$ är trubbig eftersom den är yttervinkel till den rätvinkliga triangeln $\triangle BED$. Alltså är $\angle ADB$ spetsig. Detta visar att om höjden från ett hörn i en triangel faller utanför motstående sida, så är vinkeln vid hörnet spetsig.

Parallellogram till rektangel

För att hantera fallet då höjden faller utanför motstående sida

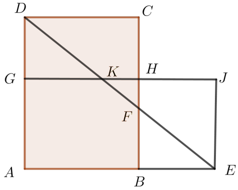


så noterar vi att $\angle ABD$ är trubbig eftersom den är yttervinkel till den rätvinkliga triangeln $\triangle BED$. Alltså är $\angle ADB$ spetsig. Detta visar att om höjden från ett hörn i en triangel faller utanför motstående sida, så är vinkeln vid hörnet spetsig.

Alltså faller höjden från B mot AD på AD och vi är klara.

Rektangel till rektangel med given sida

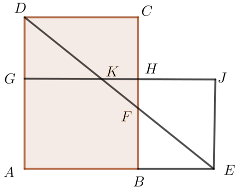
Den givna rektangeln är $ABCD$ och AE är ena sidan i den nya rektangeln. Vi antar att $|AB| \leq |AE| \leq 2|AB|$ och ska pussla om $ABCD$ till $AEJG$.



Drag DE och låt F vara skärningspunkten med BC. Avsätt G på AD så att $|BF| = |GD|$ och rita $AEJG$.

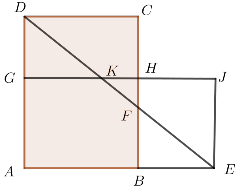
Rektangel till rektangel med given sida

Enligt alternatvinkelsatsen och tredje kongruensfallet är $\triangle DGK$ och $\triangle FBE$ kongruenta. Alltså är $|GK| = |BE|$.



Rektangel till rektangel med given sida

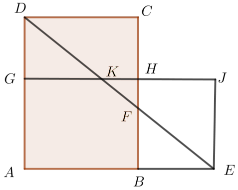
Enligt alternatvinkelsatsen och tredje kongruensfallet är $\triangle DGK$ och $\triangle FBE$ kongruenta. Alltså är $|GK| = |BE|$.



Det följer att $|KJ| = |AB| = |DC|$ och som ovan att $\triangle DFC$ och $\triangle KEJ$ är kongruenta. Nu är det bara att klippa och pussla.

Rektangel till rektangel med given sida

Enligt alternatvinkelsatsen och tredje kongruensfallet är $\triangle DGK$ och $\triangle FBE$ kongruenta. Alltså är $|GK| = |BE|$.



Det följer att $|KJ| = |AB| = |DC|$ och som ovan att $\triangle DFC$ och $\triangle KEJ$ är kongruenta. Nu är det bara att klippa och pussla.

Övning: Varför måste vi anta att $|AB| \leq |AE| \leq 2|AB|$?

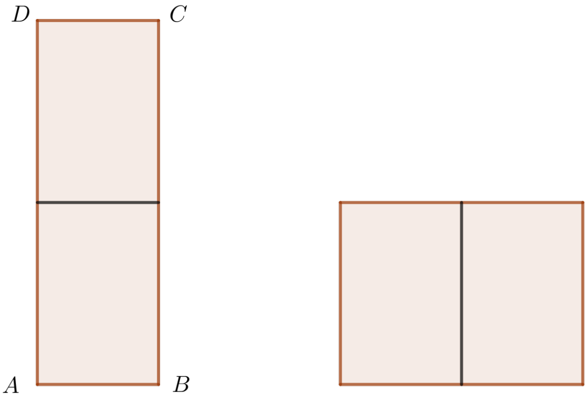
Rektangel till rektangel med given sida

Hur gör vi om inte $|AB| \leq |AE| \leq 2|AB|$?

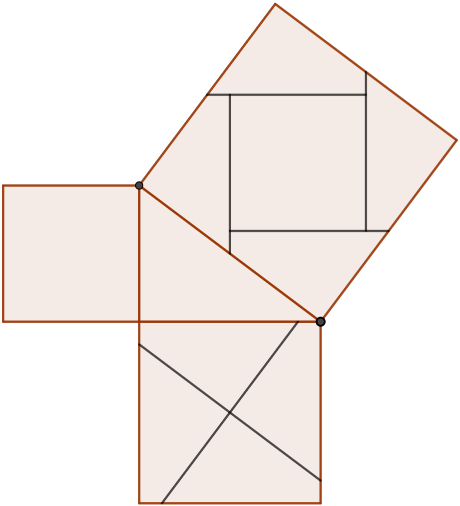
Rektangel till rektangel med given sida

Hur gör vi om inte $|AB| \leq |AE| \leq 2|AB|$?

Jo, om exempelvis $2|AB| < |AE|$, så pusslar vi om $ABCD$ som nedan så många gånger som behövs.



Pythagoras sats



Wallace-Bolyai-Gerwiens sats

Två polygoner med samma area kan pusslas om till varandra.

Satsens historia är något rörig. Den formulerades som en förmodan av Farkas Bolyai (1775-1856) och William Wallace (1768-1843) lär ha visat den 1807. Paul Gerwien visade den 1833, men lär inte ha känt till Wallace' bevis.

Farkas Bolyai var för övrigt far till Janos Bolyai, som var en av dem som upptäckte de icke-euklidiska geometrierna.

Gäller WBG i rummet?

Enligt WBG kan en triangel och en kvadrat pusslas om till varandra om de har samma area. Gäller detsamma i rummet?

Kan en tetraeder delas i mindre delar som sedan kan sättas ihop till en kub?

Euklides och pyramidens volym

I Elementas Bok XII visar Euklides formeln för volymen av en pyramid och en kon, det vill säga

$$V = \frac{A \cdot h}{3},$$

där A är arean av basen och h höjden.

Euklides och pyramidens volym

I Elementas Bok XII visar Euklides formeln för volymen av en pyramid och en kon, det vill säga

$$V = \frac{A \cdot h}{3},$$

där A är arean av basen och h höjden.

Något volymsbegrepp finns inte i Elementa, så det Euklides skriver är följande:

> *Från detta är det klart att en pyramid är tredjedelen av ett prisma med samma bas och höjd.*

(Följdsats till Proposition 7 i Bok XII)

Euklides och pyramidens volym

Beviset är långt, icke-trivialt och uppdelat i flera steg.

Euklides och pyramidens volym

Beviset är långt, icke-trivialt och uppdelat i flera steg.

1. Pyramider med samma höjd förhåller sig som sina baser.

Euklides och pyramidens volym

Beviset är långt, icke-trivialt och uppdelat i flera steg.

1. Pyramider med samma höjd förhåller sig som sina baser.
2. Ett triangulärt prisma kan delas i tre kongruenta pyramider. En sådan pyramid är alltså en tredjedel av motsvarande prisma.

Euklides och pyramidens volym

Beviset är långt, icke-trivialt och uppdelat i flera steg.

1. Pyramider med samma höjd förhåller sig som sina baser.
2. Ett triangulärt prisma kan delas i tre kongruenta pyramider. En sådan pyramid är alltså en tredjedel av motsvarande prisma.
3. För en godtycklig pyramid tar vi en annan pyramid med triangulär bas som uppstår som ett tredjedels prisma. Enligt punkt 1 har de samma volym och beviset är klart.

Euklides och pyramidens volym

Beviset är långt, icke-trivialt och uppdelat i flera steg.

1. Pyramider med samma höjd förhåller sig som sina baser.
2. Ett triangulärt prisma kan delas i tre kongruenta pyramider. En sådan pyramid är alltså en tredjedel av motsvarande prisma.
3. För en godtycklig pyramid tar vi en annan pyramid med triangulär bas som uppstår som ett tredjedels prisma. Enligt punkt 1 har de samma volym och beviset är klart.

Punkt 2 finns illustrerad i många läroböcker som ett argument för formeln för pyramidens volym, men jag har inte sett någon enda bok i vilken det diskuteras huruvida alla triangulära pyramider uppstår på detta sätt, det vill säga som tredjedelar av prismor.

Euklides och pyramidens volym

Beviset för att pyramider förhåller sig som sina baser om de har samma höjd använder den så kallade *Eudoxos uttömningsmetod* och är inte på något sätt enkelt.

Uttömningsmetoden är en föregångare till analysen och använder en sorts infinitesimala resonemang.

Dessa är dock fullständigt korrekta och inte av den informella typen ”summor av oändligt många oändligt små storheter”.

Ett modernt bevis för formeln använder förstås integraler.

Euklides och pyramidens volym

Kan man bevisa formeln för volymen av en pyramid utan att använda analys eller något annat infinitesimalt resonemang?

Finns det något ”såga och pussla”-bevis för formeln?

Gauss och Gerling

Gauss och hans elev Christian Ludwig Gerling diskuterade i en brevväxling 1844 problemet med pyramidens volym.

Gerling visade att varje polyeder kan delas i mindre delar och sättas ihop så att resultatet blir *spegelbilden* av den ursprungliga kroppen,

Detta ger ett elementärt bevis för att spegelbilden av en polyeder har samma volym som poyedern själv. ”Elementärt” betyder här att det inte använder infinitesimala metoder, men inte att det är enkelt.

Varken Gerling eller Gauss själv fann dock något elementärt bevis för den allmänna formeln.

Hilbert

Vid matematikerkongressen i Paris år 1900 presenterade David Hilbert (1862-1943) en lista med olösta problem, som han ansåg vara särskilt viktiga och intressanta.

Hilbert

Vid matematikerkongressen i Paris år 1900 presenterade David Hilbert (1862-1943) en lista med olösta problem, som han ansåg vara särskilt viktiga och intressanta.

Det tredje av Hilberts problem var att avgöra om två tetraedrar med samma basarea och samma höjd kan pusslas om till varandra.

Hilbert

Vid matematikerkongressen i Paris år 1900 presenterade David Hilbert (1862-1943) en lista med olösta problem, som han ansåg vara särskilt viktiga och intressanta.

Det tredje av Hilberts problem var att avgöra om två tetraedrar med samma basarea och samma höjd kan pusslas om till varandra.

Redan samma år visade Hilberts student Max Dehn (1878-1952) att svaret är nej.

Dehns bevis

Till varje polyeder associerade Dehn ett tal, som beror på både kantlängderna i polyedern och vinklarna mellan sidoytorna. Han visade att det inte ändras när man pusslar om kroppen. Talet ifråga kallas numera *Dehn-invarianten*.

Det visar sig att en regelbunden tetraeder och en kub har olika Dehn-invarianter och det följer att de inte kan pusslas om till varandra.

Dehns bevis

Till varje polyeder associerade Dehn ett tal, som beror på både kantlängderna i polyedern och vinklarna mellan sidoytorna. Han visade att det inte ändras när man pusslar om kroppen. Talet ifråga kallas numera *Dehn-invarianten*.

Det visar sig att en regelbunden tetraeder och en kub har olika Dehn-invarianter och det följer att de inte kan pusslas om till varandra.

J.P. Sydler bevisade 1965 att två polyedrar kan pusslas eller byggas om till varandra om och endast om de har samma volym och samma Dehn-invariant.

Referenser

Jag har mest utgått från kapitel 5 i Robin Hartshornes synnerligen läsvärda bok *Geometry* (Springer Verlag 1997 och 2000).

Två andra bra referenser är

David Benko: A New Approach to Hilbert's Third Problem. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 114, No. 8 (Oct. 2007), pp. 665-676

Max Aigner, Günter M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, 5th ed, Springer 2014