

# Några vackra geometriska resultat

Torbjörn Tambour

Mullsjö den 17 juni 2018

- ▶ omkring 300 f.v.t.
- ▶ verksam i Alexandria
- ▶ mest känd som författare till *Elementa*

- ▶ består av 13 kapitel eller böcker
- ▶ både geometri och aritmetik, det vill säga räknelära eller konsten att räkna
- ▶ har påverkat matematiskt och annat vetenskapligt skrivande på ett sätt som knappast kan överdrivas

- ▶ baseras på en utgåva av Theon av Alexandria från ca 300 v.t.
- ▶ äldsta avskriften är från 888
- ▶ arabiska 800-och 900-talet av al-Hajjaj, Ishaq ibn Hunain och Thabit ibn Qurra
- ▶ latin 1120 av Gerard av Cremona och Adelard av Bath
- ▶ engelska 1703
- ▶ svenska 1744 av astronomen Mårten Strömer
- ▶ den nuvarande standardutgåvan sammanställdes av den danske filologen och matematikhistorikern J. L. Heiberg 1883-85 (som även redigerade och utgav Arkimedes arbeten)



Euclid, *Elements*. In Greek. Parchment. Ninth century  
<http://www.loc.gov/exhibits/vatican/images/math01.jpg>

# Innehållet i Elementa

- Bok 1 Trianglar, kongruens, Pythagoras sats
- Bok 2 Geometrisk algebra (efter babylonierna?)
- Bok 3 och 4 Cirklar
- Bok 5 Proportioner (Eudoxos)
- Bok 6 Likformighet

Bok 1 Trianglar, kongruens, Pythagoras sats

Bok 2 Geometrisk algebra (efter babylonierna?)

Bok 3 och 4 Cirklar

Bok 5 Proportioner (Eudoxos)

Bok 6 Likformighet

Bok 7-9 Aritmetik, talteori (delvis efter pythagoréerna?)

Bok 10 Inkommensurabla storheter

Bok 1 Trianglar, kongruens, Pythagoras sats

Bok 2 Geometrisk algebra (efter babylonierna?)

Bok 3 och 4 Cirklar

Bok 5 Proportioner (Eudoxos)

Bok 6 Likformighet

Bok 7-9 Aritmetik, talteori (delvis efter pythagoréerna?)

Bok 10 Inkommensurabla storheter

Bok 11 Rymdgeometri

Bok 12 Volymberäkningar (Eudoxos)

Bok 13 De regelbundna polyedern (Theaitetos)



# Intressanta linjer och sträckor i en triangel

# Intressanta linjer och sträckor i en triangel

- ▶ sidornas mittpunktsnormaler
  - ▶ mittpunktsnormal: linje som är vinkelrät mot en sida och går genom dess mittpunkt

# Intressanta linjer och sträckor i en triangel

- ▶ sidornas mittpunktsnormaler
  - ▶ mittpunktsnormal: linje som är vinkelrät mot en sida och går genom dess mittpunkter
- ▶ hörnvinklarnas bisektriser
  - ▶ bisektris: linje som går genom en vinkels spets och delar vinkeln i två lika delar

# Intressanta linjer och sträckor i en triangel

- ▶ sidornas mittpunktsnormaler
  - ▶ mittpunktsnormal: linje som är vinkelrät mot en sida och går genom dess mittpunkter
- ▶ hörnvinklarnas bisektriser
  - ▶ bisektris: linje som går genom en vinkels spets och delar vinkeln i två lika delar
- ▶ medianerna
  - ▶ median: linje som går genom ett hörn i en triangel och motstående sidas mittpunkt

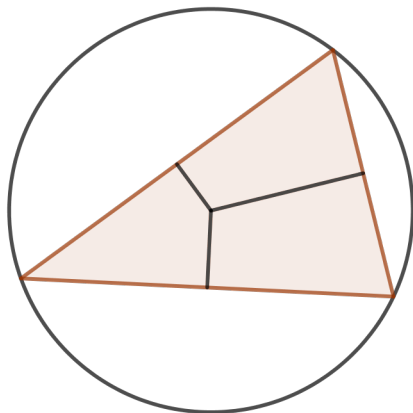
# Intressanta linjer och sträckor i en triangel

- ▶ sidornas mittpunktsnormaler
  - ▶ mittpunktsnormal: linje som är vinkelrät mot en sida och går genom dess mittpunkter
- ▶ hörnvinklarnas bisektriser
  - ▶ bisektris: linje som går genom en vinkels spets och delar vinkeln i två lika delar
- ▶ medianerna
  - ▶ median: linje som går genom ett hörn i en triangel och motstående sidas mittpunkt
- ▶ höjderna
  - ▶ höjd: linje som går genom ett hörn och är vinkelrät mot motstående sida

# Mittpunktsnormalerna

De tre mittpunktsnormalerna skär varandra i en punkt.

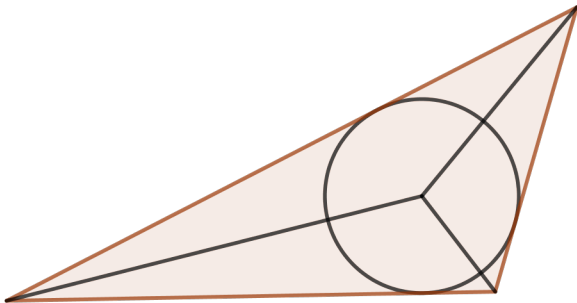
Skärningspunkten är medelpunkt i en cirkel, som går genom triangelns tre hörn, *den omskrivna cirkeln*.



# Bisektriserna

De tre bisektriserna skär varandra i en punkt.

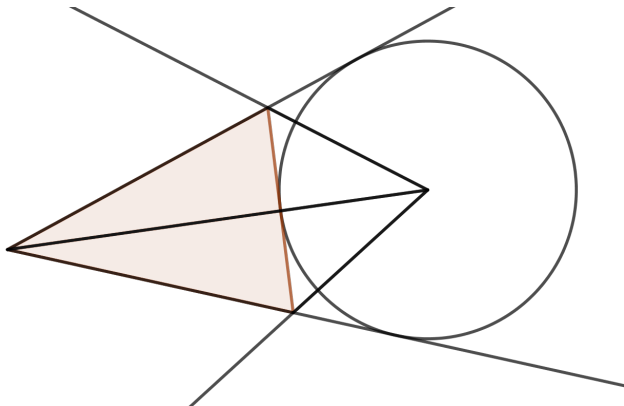
Skärningspunkten är medelpunkt i en cirkel som tangerar triangelns tre sidor, *den inskrivna cirkeln*.



# Bisektriserna igen

Den *inre* bisektrisen till ett hörn och de *yttre* till de andra två skär varandra i en punkt.

Skärningspunkten är medelpunkt i en cirkel som tangerar en sida och *förlängningarna* av de två andra, en *vidskreven cirkel*. Det finns tre vidskrivna cirklar.

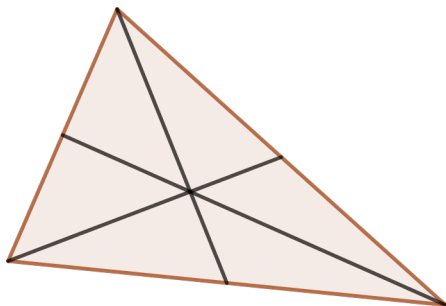




# Medianerna

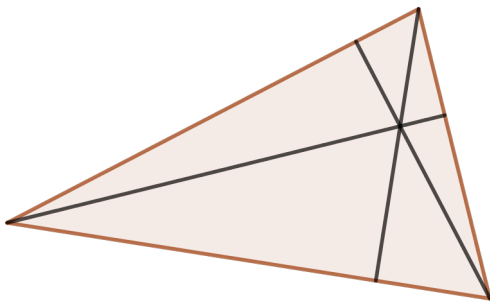
Medianerna i en triangel skär varandra i en punkt, som kallas triangelns *tyngdpunkt*.

Om man går från ett hörn, så kommer man till tyngdpunkten när man har gått  $\frac{2}{3}$  av vägen till motstående sidas mittpunkt.



# Höjderna

Höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.



# Har det hänt något efter Euklides?

Sedan antiken har geometrin utvecklats i många olika riktningar och den har knutits ihop med matematikens andra områden.

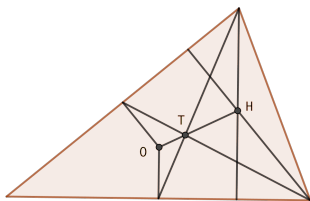
Jag ska visa ett par ganska spektakulära satser i "ren" euklidisk geometri som har upptäckts sådär 2000 år efter Euklides.

De anknyter till det jag redan har pratat om.

# Eulerlinjen

Den schweiziske matematikern Leonhard Euler (1707-83) upptäckte och bevisade att följande tre punkter ligger på en rät linje, *Eulerlinjen*:

- ▶ mittpunktsnormalernas skärningspunkt, det vill säga omskrivna cirkelns medelpunkt O
- ▶ medianernas skärningspunkt, det vill säga tyngdpunkten T
- ▶ höjdernas skärningspunkt H



Han visade också att T ligger mellan O och H och att avståndet mellan O och T är  $\frac{1}{3}$  av avståndet mellan O och H.

# Niopunktscirkeln

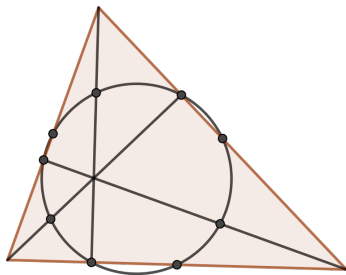
Enligt Daniel Pedoe, engelsk författare till ett flertal böcker om geometri, är niopunktscirkeln "the first exciting circle in geometry".

Som antyds av namnet är niopunktscirkeln en cirkel som går genom inte mindre än **nio** intressanta punkter i en triangel.

# Niopunktscirkeln

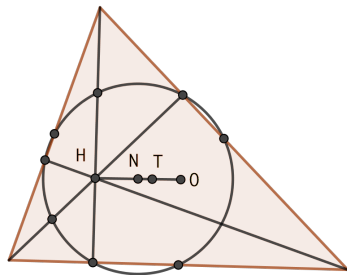
De punkter som ligger på niopunktscirkeln är

- ▶ sidornas mittpunkter
- ▶ höjdernas fotpunkter
- ▶ mittpunkterna på sträckorna från hörnen till höjdernas skärningspunkt.



# Niopunktscirkeln: fler fascinerande fakta

Medelpunkten i niopunktscirkeln ligger på Eulerlinjen och är närmare bestämt mittpunkten på linjen.



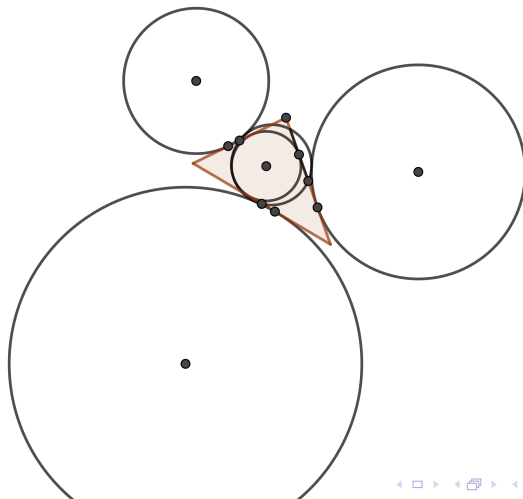
# Niopunktscirkeln: slutfanfar

Men den inskrivna cirkeln, då? Har den något att göra med niopunktscirkeln?



# Niopunktscirkeln: slutfanfar

Men den inskrivna cirkeln, då? Har den något att göra med niopunktscirkeln? Jodå, niopunktscirkeln *tangerar* den inskrivna cirkeln - och de tre vidskrivna cirklarna.



## Niopunktscirkeln: lite historia

Två franska geometriker, Charles Brianchon och Jean-Victor Poncelet, visade oberoende av varandra omkring 1820 att höjdernas fotpunkter och sidornas mittpunkter ligger på en cirkel, sexpunktscirkeln.

Tysken Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) visade samma sak 1822 och upptäckte dessutom att sexpunktscirkeln tangerar den inskrivna och de vidskrivna cirklarna. Han var för övrigt bror till filosofen Ludwig Feuerbach, som hade stort inflytande på bland andra Marx, Engels, Wagner och Nietzsche genom sin kristendomskritik.

Strax efter Feuerbach visade en annan fransk matematiker, Olry Terquem, att mittpunkterna på sträckorna mellan hörnen och höjdernas skärningspunkt också ligger på cirkeln och det var han som myntade ordet niopunktscirkeln.

# Geometri efter Euklides

Som vi har sett så har den euklidiska geometrin fortsatt att utvecklas i alla fram till 1800-talet, men redan under antiken utvecklades grenar av geometrin som inte brukar räknas till den euklidiska.

# Geometri efter Euklides

Som vi har sett så har den euklidiska geometrin fortsatt att utvecklas i alla fram till 1800-talet, men redan under antiken utvecklades grenar av geometrin som inte brukar räknas till den euklidiska.

Grunderna av teorin för kägelsnitt, det vill säga ellipser, parabler och hyperbler, lades av bland andra Apollonios av Perga, som levde ca 200 f.v.t.

# Geometri efter Euklides

Som vi har sett så har den euklidiska geometrin fortsatt att utvecklas i alla fram till 1800-talet, men redan under antiken utvecklades grenar av geometrin som inte brukar räknas till den euklidiska.

Grunderna av teorin för kägelsnitt, det vill säga ellipser, parabler och hyperbler, lades av bland andra Apollonios av Perga, som levde ca 200 f.v.t.

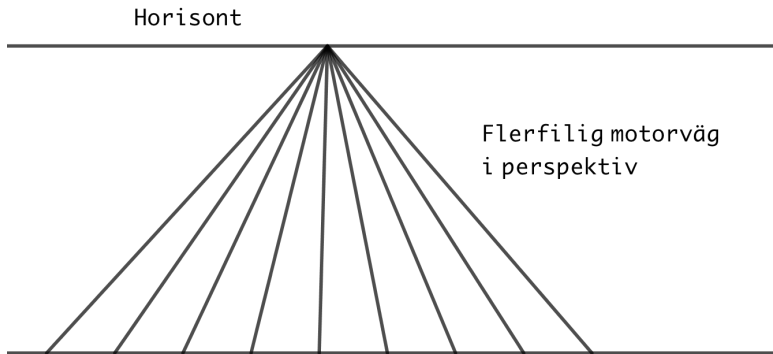
Under renässansen började en helt ny gren av geometrin utvecklas, *projektiv geometri*, som är den matematiska fortsättningen på *perspektivet* inom måleriet.

Hur man korrekt ska avbilda en tredimensionell värld på en tvådimensionell yta (en tavla) upptäcktes under renässansen av bland andra

- ▶ Filippo Brunelleschi (1377-1446), målare och arkitekt, bland annat till Santa Maria del Fiori i Florens
- ▶ Leon Battista Alberti (1404-72), författare till den första boken om perspektivmåleri, *Della pittura*. I boken beskrivs *costruzione legittima*, den tillåtna konstruktionen, som är en beskrivning av hur man ritar perspektiviskt riktigt.
- ▶ Leonardo da Vinci (1452-1519)
- ▶ Albrecht Dürer (1471-1528)



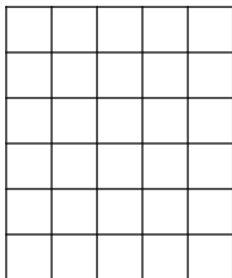
# Varför tycks parallella linjer komma från samma punkt?





# Hur ska man rita ett rutigt golv perspektiviskt riktigt?

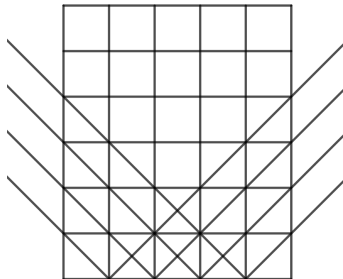
Vi vet hur de lodräta linjerna ska avbildas,



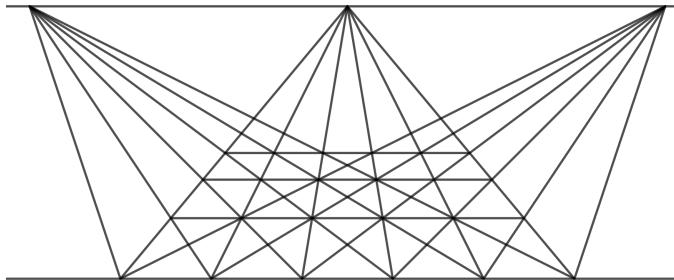
men hur tätt ska de vågräta ritas?

# Hur ska man rita ett rutigt golv perspektiviskt riktigt?

Lösningen är att betrakta *diagonalerna* i rutorna – de är ju parallella och går därför ihop vid horisonten.



# Det rutiga golvet



Inom matematiken ledde perspektivet till den *projektiva geometrin*, som handlar om egenskaper hos olika typer av projektioner.

Den projektiva geometrin utvecklades mycket snabbt från ca 1600 och är ännu idag en central del av matematiken.

Vi ska se på en av de första satserna i projektiv geometri, Desargues sats, från 1636.

# Desargues sats

Från en punkt utgår tre strålar på vilka två trianglar har sina hörn. Triangelsidornas förlängningar skär varandra i tre punkter, som ligger på en rät linje.

