Manipulationer av algebraiska uttryck

Valentina Chapovalova

SMaL-kursen i Mullsjö

19 juni 2018

Kluring 1

Bestäm produkten

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot....\cdot(x-z)$$

Lösning kluring 1

Bestäm produkten

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot..\cdot(x-x)\cdot..\cdot(x-z)=0$$

Identitetslagarna

$$a \cdot 1 = a$$

Identitetslagarna

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Identitetslagarna

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a + 0 = a$$

Identitetslagarna

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a + 0 = a$$

$$0 + a = a$$

Kluring 2

Tänk på ett tal.

Kluring 2

Tänk på ett tal.
Addera 25 till det.

Kluring 2

Tänk på ett tal.
Addera 25 till det.
Sedan addera 125.

Kluring 2

Tänk på ett tal.
Addera 25 till det.
Sedan addera 125.
Sedan subtrahera 37.

Kluring 2

Tänk på ett tal.
Addera 25 till det.
Sedan addera 125.
Sedan subtrahera 37.
Subtrahera det ursprungliga talet.

Kluring 2

Tänk på ett tal.
Addera 25 till det.
Sedan addera 125.
Sedan subtrahera 37.
Subtrahera det ursprungliga talet.
Multiplicera resultatet med 50.

Kluring 2

Tänk på ett tal.
Addera 25 till det.
Sedan addera 125.
Sedan subtrahera 37.
Subtrahera det ursprungliga talet.
Multiplicera resultatet med 50.
Dividera med 10.

Kluring 2

Tänk på ett tal.
Addera 25 till det.
Sedan addera 125.
Sedan subtrahera 37.
Subtrahera det ursprungliga talet.
Multiplicera resultatet med 50.
Dividera med 10.
Du fick talet 565.

Lösning kluring 2

Tänk på ett tal. X

Lösning kluring 2

Tänk på ett tal.	X
Addera 25 till det.	$X + 25$

Lösning kluring 2

Tänk på ett tal.	X
Addera 25 till det.	$X + 25$
Sedan addera 125.	$X + 25 + 125 = X + 150$

Lösning kluring 2

Tänk på ett tal.	X
Addera 25 till det.	$X + 25$
Sedan addera 125.	$X + 25 + 125 = X + 150$
Sedan subtrahera 37.	$X + 150 - 37 = X + 113$

Lösning kluring 2

Tänk på ett tal.	X
Addera 25 till det.	$X + 25$
Sedan addera 125.	$X + 25 + 125 = X + 150$
Sedan subtrahera 37.	$X + 150 - 37 = X + 113$
Subtrahera det ursprungliga talet.	$X + 113 - X = 113$

Lösning kluring 2

Tänk på ett tal.	X
Addera 25 till det.	$X + 25$
Sedan addera 125.	$X + 25 + 125 = X + 150$
Sedan subtrahera 37.	$X + 150 - 37 = X + 113$
Subtrahera det ursprungliga talet.	$X + 113 - X = 113$
Multiplicera resultatet med 50.	$113 \cdot 50 = 5650$

Lösning kluring 2

Tänk på ett tal.	X
Addera 25 till det.	$X + 25$
Sedan addera 125.	$X + 25 + 125 = X + 150$
Sedan subtrahera 37.	$X + 150 - 37 = X + 113$
Subtrahera det ursprungliga talet.	$X + 113 - X = 113$
Multiplicera resultatet med 50.	$113 \cdot 50 = 5650$
Dividera med 10.	$5650/10 = 565$

Lösning kluring 2

Tänk på ett tal.	X
Addera 25 till det.	$X + 25$
Sedan addera 125.	$X + 25 + 125 = X + 150$
Sedan subtrahera 37.	$X + 150 - 37 = X + 113$
Subtrahera det ursprungliga talet.	$X + 113 - X = 113$
Multiplicera resultatet med 50.	$113 \cdot 50 = 5650$
Dividera med 10.	$5650/10 = 565$
Du fick talet 565.	

Algebrans utveckling

Pre-algebra har funnits redan i Babylon (2000 f.Kr. - 539 f.Kr.)

Algebrans utveckling

Pre-algebra har funnits redan i Babylon (2000 f.Kr. - 539 f.Kr.)

Synkoperad algebra (begränsad användning av variabler) från Diofantos tid (250 e.Kr.)

Algebrans utveckling

Pre-algebra har funnits redan i Babylon (2000 f.Kr. - 539 f.Kr.)

Synkoperad algebra (begränsad användning av variabler) från Diofantos tid (250 e.Kr.)

Algebra i modern mening utvecklades framför allt av Viète (1500-talet)

Kluring 3

Räkna ut

$$\frac{(2008 \cdot 2028 + 100)(1998 \cdot 2038 + 400)}{2018^4}$$

Lösning kluring 3

Räkna ut

$$\frac{(2008 \cdot 2028 + 100)(1998 \cdot 2038 + 400)}{2018^4}$$

Lösning kluring 3

Räkna ut

$$\frac{(2008 \cdot 2028 + 100)(1998 \cdot 2038 + 400)}{2018^4}$$

Om $2008 = X$ får vi

$$\frac{((X-10) \cdot (X+10) + 100)((X-20) \cdot (X+20) + 400)}{X^4}$$

Lösning kluring 3

Räkna ut

$$\frac{(2008 \cdot 2028 + 100)(1998 \cdot 2038 + 400)}{2018^4}$$

Om $2008 = X$ får vi

$$\frac{((X-10) \cdot (X+10) + 100)((X-20) \cdot (X+20) + 400)}{X^4}$$

$$= \frac{((X^2 - 10^2) + 100)((X^2 - 20^2) + 400)}{X^4} = \frac{X^2 \cdot X^2}{X^4} = 1$$

Införande av variabler

Tumregel: inför variabler när du behöver spara plats, tid och tankekraft!

Konjugatregeln

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Konjugatregeln

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\frac{2}{1-\sqrt{3}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{2+2\sqrt{3}}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{-2} = -1-\sqrt{3}$$

Konjugatregeln

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\frac{2}{1-\sqrt{3}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{2+2\sqrt{3}}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{-2} = -1-\sqrt{3}$$

Om $a+bi$ är ett nollställe, så är $a-bi$ också ett nollställe till ett polynom med reella koefficienter.

Kluring 4

Två kvadrater är givna.

Omkretsen på den andra är n cm större än omkretsen på den första.

Arean på den andra är däremot n cm^2 större.

Bestäm den sammanlagda omkretsen på de två kvadraterna.

Lösning kluring 4

Två kvadrater är givna. Med sidan a och med sidan b.

Lösning kluring 4

Två kvadrater är givna. Med sidan a och med sidan b.

Omkretsen på den andra är n cm större än omkretsen på den första. $4b - 4a = 4 \cdot (b - a) = n$

Lösning kluring 4

Två kvadrater är givna. Med sidan a och med sidan b.

Omkretsen på den andra är n cm större än omkretsen på den första. $4b - 4a = 4 \cdot (b - a) = n$

Arean på den andra är däremot n cm^2 större.
$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = n$

Lösning kluring 4

Två kvadrater är givna. Med sidan a och med sidan b.

Omkretsen på den andra är n cm större än omkretsen på den första. $4b - 4a = 4 \cdot (b - a) = n$

Arean på den andra är däremot n cm^2 större.
$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = n$

Bestäm den sammanlagda omkretsen på de två kvadraterna.
$(b - a) \cdot 4 = (b - a)(b + a) \Rightarrow 4 = b + a$ och $4b + 4a = 4 \cdot 4 = 16$

Binomialsatsen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\vdots$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Kluring 5

Man vet att $a - \dfrac{1}{a} = 3$. Vad är $a^3 - \dfrac{1}{a^3}$ lika med?

Lösning kluring 5

Man vet att $a - \dfrac{1}{a} = 3$. Då är $\left(a - \dfrac{1}{a}\right)^3 = 3^3 = 27$

Lösning kluring 5

Man vet att $a - \frac{1}{a} = 3$. Då är $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = 3^3 = 27$

Men $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}$

Lösning kluring 5

Man vet att $a - \frac{1}{a} = 3$. Då är $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = 3^3 = 27$

Men $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}$

$= a^3 - 3 \cdot a + 3 \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3 \cdot 3$

Lösning kluring 5

Man vet att $a - \frac{1}{a} = 3$. Då är $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = 3^3 = 27$

Men $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}$

$= a^3 - 3 \cdot a + 3 \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3 \cdot 3$

$\Rightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} = 27 + 9 = 36.$

Kluring 6

Är följande tal ett primtal: $3^{200} + 4^{99} - 6^{100}$?

Lösning kluring 6

Är följande tal ett primtal: $3^{200} + 4^{99} - 6^{100}$?

$$3^{200} + 4^{99} - 6^{100} = 3^{200} + (2^2)^{99} - (2 \cdot 3)^{100}$$

$$= (3^{100})^2 + (2^{99})^2 - 2^{100} \cdot 3^{100} = (3^{100})^2 + (2^{99})^2 - 2 \cdot 2^{99} \cdot 3^{100}$$

$$= (3^{100} - 2^{99})^2$$

Kvadratkomplettering

$$a^2 + 2xa + y = (a + x)^2 - x^2 + y$$

Teleskopiska summor

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2017 \cdot 2018}$$

Teleskopiska summor

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2017\cdot 2018}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)$$

Teleskopiska summor

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2017\cdot 2018}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)$$

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2017}}-\frac{1}{2018}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2018}=\frac{2017}{2018}$$

Kluring 7

Bestäm produkten

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\dots\left(1-\frac{1}{225}\right)$$

Lösning kluring 7

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\dots\left(1-\frac{1}{225}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{15}\right)$$

Lösning kluring 7

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\dots\left(1-\frac{1}{225}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\dots\left(\frac{16}{15}\right)$$

Lösning kluring 7

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\dots\left(1-\frac{1}{225}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\dots\left(\frac{16}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\cancel{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}\cancel{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}\dots\left(\frac{16}{15}\right)=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

Kluring 8

För varje positivt heltal n bestäm summan

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$$

(I nämnarna står alla möjliga produkter av några av talen 1, 2, ..., n. Produkten av ett enda tal är talet självt.)

Lösning kluring 8

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot ... \cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$$

Lösning kluring 8

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$$

$$=\left(\frac{2}{1}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)-1$$

Lösning kluring 8

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$$

$$=\left(\frac{2}{1}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\cdot \ldots \cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)-1$$

$$=\left(\frac{\cancel{2}}{1}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right)\cdot \ldots \cdot\left(\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)-1=n+1-1=n$$

Spegelvända polynom

Varje polynom på formen $x^n + y^n$ kan skrivas med hjälp av bara uttrycken $x + y$ och xy.

Spegelvända polynom

Varje polynom på formen $x^n + y^n$ kan skrivas med hjälp av bara uttrycken $x + y$ och xy.
Till exempel

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

Spegelvända polynom

Varje polynom på formen $x^n + y^n$ kan skrivas med hjälp av bara uttrycken $x + y$ och xy.
Till exempel

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

och så vidare...

Spegelvända polynom

Varje polynom på formen $x^n + y^n$ kan skrivas med hjälp av bara uttrycken $x + y$ och xy.
Till exempel

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

och så vidare...

En summa på formen $s_k = x^k + y^k + z^k$ kan skrivas om som ett polynom i $x + y + z, xy + yz + xz, xyz$ (dvs uttryckas som en polynomfunktion mha bara dem).

Kluring 9

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Lösning kluring 9

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 \end{cases}$$

Lösning kluring 9

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 8 \\ (x+y)^2 - 2xy = 4 \end{cases}$$

Lösning kluring 9

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 8 \\ (x+y)^2 - 2xy = 4 \end{cases}$$

$$(x+y) = A, xy = B$$

Lösning kluring 9

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 8 \\ (x+y)^2 - 2xy = 4 \end{cases}$$

$$(x+y) = A, xy = B$$

$$\begin{cases} A^3 - 3AB = 8 \\ A^2 - 2B = 4 \end{cases}$$

Lösning kluring 9, forts.

$$\begin{cases} A^3 - 3AB = 8 \\ A^2 - 2B = 4 \Rightarrow A^3 - 2AB = 4A \quad (A \neq 0) \end{cases}$$

Lösning kluring 9, forts.

$$\begin{cases} A^3 - 3AB = 8 \\ A^2 - 2B = 4 \Rightarrow A^3 - 2AB = 4A \quad (A \neq 0) \end{cases}$$

$$(A^3 - 2AB) - (A^3 - 3AB) = 4A - 8$$

Lösning kluring 9, forts.

$$\begin{cases} A^3 - 3AB = 8 \\ A^2 - 2B = 4 \Rightarrow A^3 - 2AB = 4A \quad (A \neq 0) \end{cases}$$

$$(A^3 - 2AB) - (A^3 - 3AB) = 4A - 8$$

$$AB = 4A - 8$$

Lösning kluring 9, forts.

$$\begin{cases} A^3 - 3AB = 8 \\ A^2 - 2B = 4 \Rightarrow A^3 - 2AB = 4A \quad (A \neq 0) \end{cases}$$

$$(A^3 - 2AB) - (A^3 - 3AB) = 4A - 8$$

$$AB = 4A - 8$$

$$A^3 - 3(4A - 8) = 8 \Leftrightarrow A^3 - 12A + 16 = 0$$

Lösning kluring 9, forts.

$$A^3 - 3(4A - 8) = 8 \Leftrightarrow A^3 - 12A + 16 = 0$$

Lösning kluring 9, forts.

$$A^3 - 3(4A - 8) = 8 \Leftrightarrow A^3 - 12A + 16 = 0$$

$A = 2$ är en rot:

Lösning kluring 9, forts.

$$A^3 - 3(4A - 8) = 8 \Leftrightarrow A^3 - 12A + 16 = 0$$

$A = 2$ är en rot:

$$A^3 - 12A + 16 = (A - 2)(A^2 + 2A - 8)$$

Lösning kluring 9, forts.

$$A^3 - 3(4A - 8) = 8 \Leftrightarrow A^3 - 12A + 16 = 0$$

$A = 2$ är en rot:

$$A^3 - 12A + 16 = (A - 2)(A^2 + 2A - 8)$$

$$= (A - 2)(A - 2)(A + 4)$$

Lösning kluring 9, forts.

$$A^3 - 3(4A - 8) = 8 \Leftrightarrow A^3 - 12A + 16 = 0$$

$A = 2$ är en rot:

$$A^3 - 12A + 16 = (A - 2)(A^2 + 2A - 8)$$

$$= (A - 2)(A - 2)(A + 4)$$

$x + y = 2$ eller $x + y = -4$

Lösning kluring 9, forts.

$A = x + y = 2$ eller $A = x + y = -4$

$$AB = 4A - 8$$

Lösning kluring 9, forts.

$A = x + y = 2$ eller $A = x + y = -4$

$$AB = 4A - 8$$

(Om $A = 2$) $\quad 2B = 8 - 8 \Rightarrow B = 0$
eller
(Om $A = -4$) $\quad -4B = -16 - 8 \Rightarrow B = 6$

Lösning kluring 9, forts.

$A = x + y = 2$ eller $A = x + y = -4$

$$AB = 4A - 8$$

(Om $A = 2$) $\quad 2B = 8 - 8 \Rightarrow B = 0$
eller
(Om $A = -4$) $\;-4B = -16 - 8 \Rightarrow B = 6$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Lösning kluring 9, forts.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Då måste någon av x eller y vara lika med 0 och då är den andra av dem lika med 2 och vi får två lösningar i det här fallet: $(x, y) = (0, 2)$ och $(x, y) = (2, 0)$.

Lösning kluring 9, forts.

$$\begin{cases} x + y = -4 \Rightarrow xy + y^2 = -4y \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y + 6 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 + 2 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 = -2$$

vilket saknar reella lösningar.

Division med rest

Om man dividerar polynomet $P(x)$ med $(x - a)$ så blir resten $P(a)$.

Division med rest

Om man dividerar polynomet $P(x)$ med $(x-a)$ så blir resten $P(a)$. Det innebär bland annat att $P(x)$ är delbart med $(x-a)$ om och endast om a är en rot till P.

Kluring 10

Visa att a är åtminstone en dubbelrot till polynomet $P(x)$ om och endast om $P(a) = 0$ och $P'(a) = 0$.

Lösning kluring 10

Om a är en rot så är $P(a) = 0$. Vi dividerar polynomet med $(x-a)^2$:

Lösning kluring 10

Om a är en rot så är $P(a) = 0$. Vi dividerar polynomet med $(x - a)^2$:

$$P(x) = (x - a)^2 Q(x) + c(x - a)$$

just eftersom a en rot. Det kommer vara en dubbelrot om och endast om $c = 0$.

Lösning kluring 10

Om a är en rot så är $P(a) = 0$. Vi dividerar polynomet med $(x - a)^2$:

$$P(x) = (x - a)^2 Q(x) + c(x - a)$$

just eftersom a en rot. Det kommer vara en dubbelrot om och endast om $c = 0$.

$$P'(x) = 2(x - a)Q(x) + (x - a)^2 Q'(x) + c$$

Lösning kluring 10

Om a är en rot så är $P(a) = 0$. Vi dividerar polynomet med $(x-a)^2$:

$$P(x) = (x-a)^2 Q(x) + c(x-a)$$

just eftersom a en rot. Det kommer vara en dubbelrot om och endast om $c = 0$.

$$P'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x) + c$$

$$P'(a) = c$$

alltså är $c = 0$ om och endast om $P'(a) = 0$.

Algebrans fundamentalsats (eller egentligen en konsekvens av den)

Varje polynom av grad har n komplexa rötter, med multiplicitet inräknat. Det vill säga

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

där $z_1, z_2, \dots, z_n$ är rötterna.