



Tröskelbegrepp

Kerstin Pettersson

kerstin.pettersson@mnd.su.se

2019-06-16
SMaL:s sommarkurs i Mullsjö

Min bakgrund

- Gymnasielärare i matematik och fysik
- Adjunkt i matematik vid Högskolan i Skövde
- Forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning
- Disputerade 2008, Göteborgs universitet
- Sedan 2009 forskare och lärarutbildare vid Stockholms universitet (docent i matematikämnets didaktik)

Innehåll

- Vad är ett **begrepp** och hur uppfattar elever begrepp?
- Vad är ett **tröskelbegrepp** och varför är de viktiga?
- Hur kan **utveckling av begreppsuppfattning** beskrivas?
- **En studie** om funktionsbegreppet
- Att utveckla elevers **begreppsförmåga**

Vad är ett begrepp?

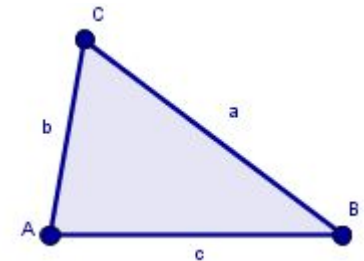
Ett begrepp kan ses som

- En klassificering – vi sorterar knivar och gafflar
- En abstraktion av en matematisk idé
– en matematisk idé systematiseras, generaliseras och abstraheras
- En mänsklig tankekonstruktion - begreppsbildning
- Behöver "etikett".
Representeras på olika sätt t ex genom ord, bild, symbol.
- **"Innehåll med etikett"**

Vad är ett begrepp?

Ett begrepp kan vara ett *matematiskt objekt*.

Ex: Triangel

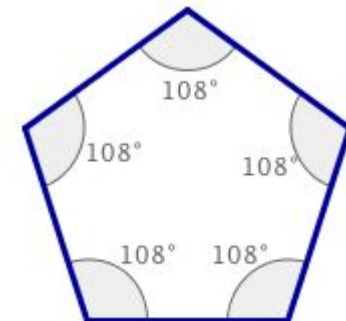


Även *operationer* och *egenskaper* kan uppfattas som begrepp.

- Ex: Multiplikation

$$2 \cdot 3 = 6$$

- Ex: Regelbunden (om månghörning)



Vad är ett begrepp?

- Ett matematiskt begrepp vilar på en *formell definition*.
- Definitionen preciserar det som utmärker begreppet. Definitionen kan språkligt uttryckas på olika sätt och även olika idéer kan bilda utgångspunkt för definitionen.
- Egenskaper hos begreppet vara del av definitionen eller fastställas senare genom bevis. Definitionen måste särskilja begreppet från andra begrepp.
- Definitioner kan förändras över tid – de är mänskliga konstruktioner.
- Definitionen måste tolkas av läsaren.

Begreppsuppfattning

- *Individens tolkning* av begreppet.
- Individens tolkning av "etikettens innehåll".
- All den kunskap som individen förknippar med begreppet.
- Inkluderar individens tolkning av definitionen.

Concept image (begreppsBild)

(Tall och Vinner, 1981)

- "den kognitiva struktur som är associerad med ett begrepp"
- Består av individens tolkningar och förståelse av ett begrepp
- Innefattar alla egenskaper och processer som individen förknippar med begreppet
- Innefattar även mentala bilder t.ex. figurer och grafer som förknippas med begreppet
- Byggs upp successivt genom individens möte med begreppet
- Olika delar av individens concept image aktualiseras i olika sammanhang

Tröskelbegrepp (threshold concepts)

(Meyer & Land, 2003)

- Begrepp som kan fungera som en portal till ett tidigare onåbart sätt att tänka om någonting
- Förståelse för tröskelbegrepp förändrar synen på ett helt område
- Exempel: Gränsvärde, alternativkostnad, demokrati



“A **threshold concept** can be considered as akin to a portal, opening up a new and previously inaccessible way of thinking about something.”
(Meyer & Land, 2003)

Egenskaper



Svåra att lära

Troublesome knowledge (Perkins, 1999)

- Intuitiv uppfattning fungerar inte (counter-intuitive)
- Till synes motsägelsefull
- Verkar oförenlig med tidigare kunskap

- Kan mötas av motstånd

Transformativa

- Förståelse skapar en avgörande förändring av hur individen uppfattar ett helt område
- Kan ske plötsligt men är oftast en process utsträckt över lång tid.

Integrativa

- Förståelse för ett tröskelbegrepp visar för individen tidigare osynliga kopplingar mellan begrepp inom området
- Behärskande av ett tröskelbegrepp hjälper individen att sammanfoga tidigare fragmenterade kunskaper
- "saker faller på plats"

Irreversibla

- Uppnådd förståelse tappas inte enkelt.
- Kan utgöra problem för lärare: det är svårt att komma ihåg hur man såg på begreppet innan tröskeln passerades.

Diskursiva

- Utveckling av förståelse för ett tröskelbegrepp inkluderar språklig utveckling.
- Diskursen utvidgas och stärks.
- Diskursen utvecklas mot en mer ämnesspecifik diskurs inklusive formella uttryck och symbolspråk.

Rekonstitutiva

- Lärande av tröskelbegrepp kan inkludera en förändring av individens självuppfattning/identitet

Områdesspecifika

- Tröskelbegreppen utgör gränsmarkeringar mot nya områden
- Att passera ett tröskelbegrepp ger tillträde till nya områden

Liminal space

- När tröskeln ska passeras uppstår en fas där förståelsen är instabil
- Förstår ena sekunden, nästa har man tappat hur man tänkte
- Risk att individen fastnar här
- Risk att individen då skapar lösning som inte är vidareutvecklingsbar (t ex utantillkunskap, endast

Forskning om tröskelbegrepp

- 'Jewels in the curriculum' – fokuserar avgörande passager
(Land, Cousin, Meyer & Davies, 2006)
- Fokus på tröskelbegrepp - förbättrat studieresultat
(Carstensen & Bernhard, 2008)
- 'First impression matters' – förenkling kan skapa hinder
(Shanahan & Meyer, 2006)

Webbsida med mycket material (sök på 'threshold concept')
<http://www.ee.ucl.ac.uk/~mflanaga/thresholds.html>

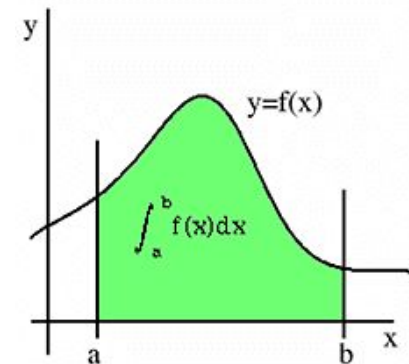
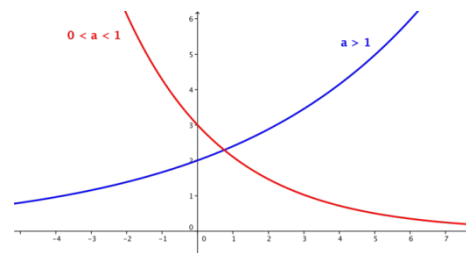
Tröskelbegrepp i min forskning

Jag har studerat universitetsstudenters uppfattningar av några tröskelbegrepp:

- Funktion
- Gränsvärde
- Derivata
- Integral

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx$$



Tröskelbegrepp i grundskolan/gymnasiet

Finns denna typ av begrepp även i grundskolans
och gymnasiets matematik?

Vilka är de i så fall?

Diskutera med grannen!

Ett exempel: Bråkbegreppet

- Svårt att lära enligt många studier
- Generaliseringar från de naturliga talen fungerar inte
- Måste ses både som ett par av tal och som en enskild kvantitet
- Förståelse för bråk öppnar för nya möjligheter inom flera områden

Teorier om begreppsutveckling

- **Conceptual change**

provisorisk förståelse byts mot mer vetenskaplig
(Vosinadou, 1994)

- **Differentiering mellan kontexter**

att lära sig välja en förklaring lämplig i situationen
(Halldén, 1999)

Process – objekt

- Aktion, Process, Objekt, Schema (APOS)
(Dubinsky, 1991)
- Övergång från process till objekt - reifikation
(Sfard, 1991)
- "Procept"
(Grey & Tall, 1994)

Procedurell och konceptuell kunskap

Hiebert (1986) skiljer på två typer av kunskap

- *Procedurell kunskap*
 - kunskaper om regler och procedurer
- *Konceptuell kunskap*
 - rik på kopplingar
 - utgör en sammanhängande väv av kunskap

Alternativ definition (Star, 2005)

- *Procedurell kunskap*
- kunskap om regler och procedurer
- *Konceptuell kunskap*
- kunskap om begrepp och principer

Båda kunskapstyperna kan vara djupa eller svaga:

- *Djup procedurell kunskap*
- rik och väl sammanhängande kunskap om procedurer
- *Svag konceptuell kunskap*
- ytlig och osammanhängande kunskap om begrepp och principer

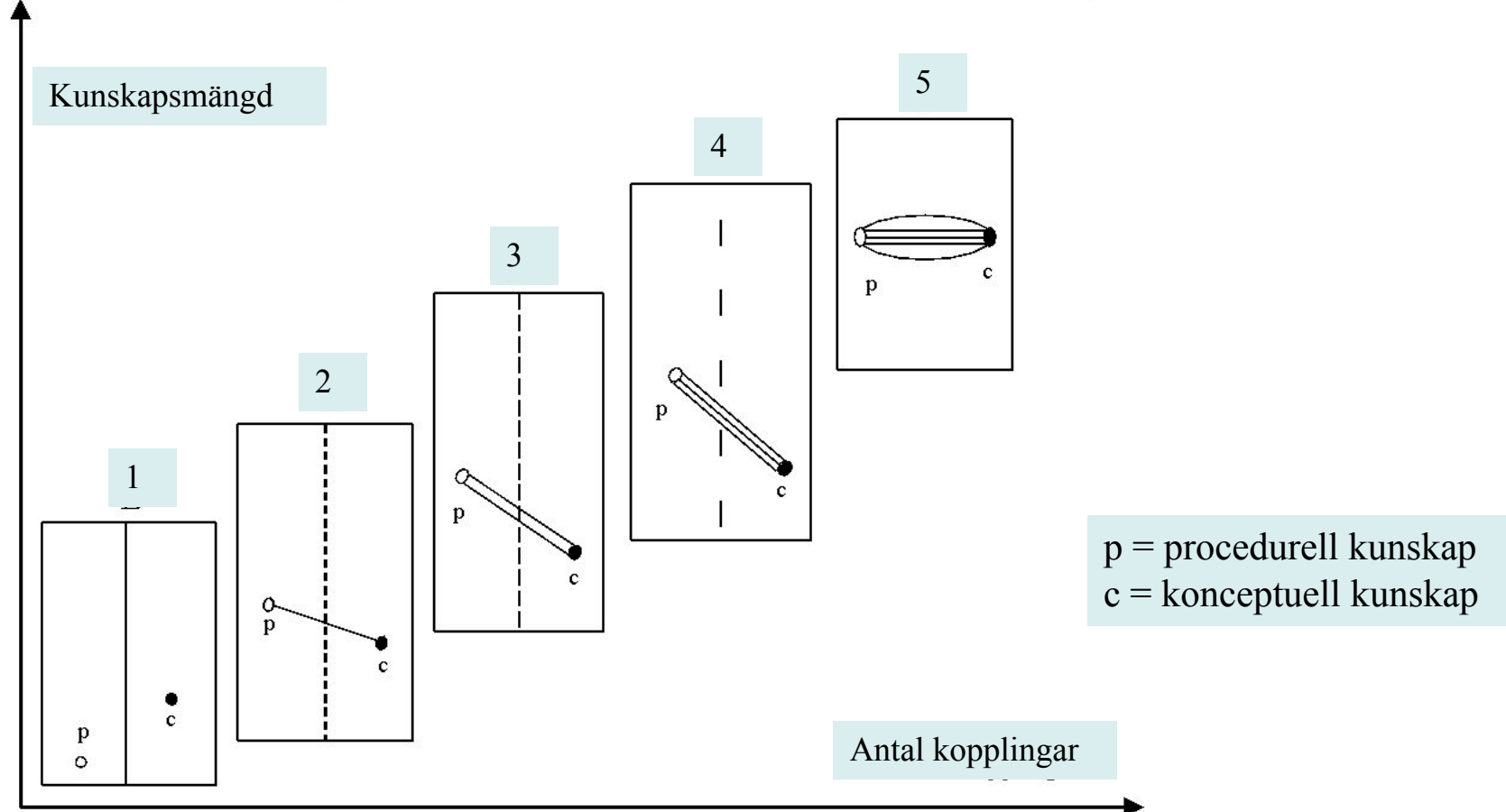
Modell för utveckling av procedurell och konceptuell kunskap

(efter Baroody, Johnson & Feil, 2007)

1. Svaga procedurella och konceptuella kunskaper utan kopplingar dem emellan.
2. Viss procedurell kunskap och svag konceptuell kunskap med få och svaga kopplingar dem emellan.
3. Relativt djup procedurell kunskap och relativt svag konceptuell kunskap med viss koppling dem emellan.
4. Djupa procedurella och relativt djupa konceptuella kunskaper som är kopplade till varandra.
5. Djupa procedurella och konceptuella kunskaper som är fullt integrerade.

Modell för utveckling av procedurell och konceptuell kunskap

(efter Baroody, Johnson & Feil, 2007, s. 124)

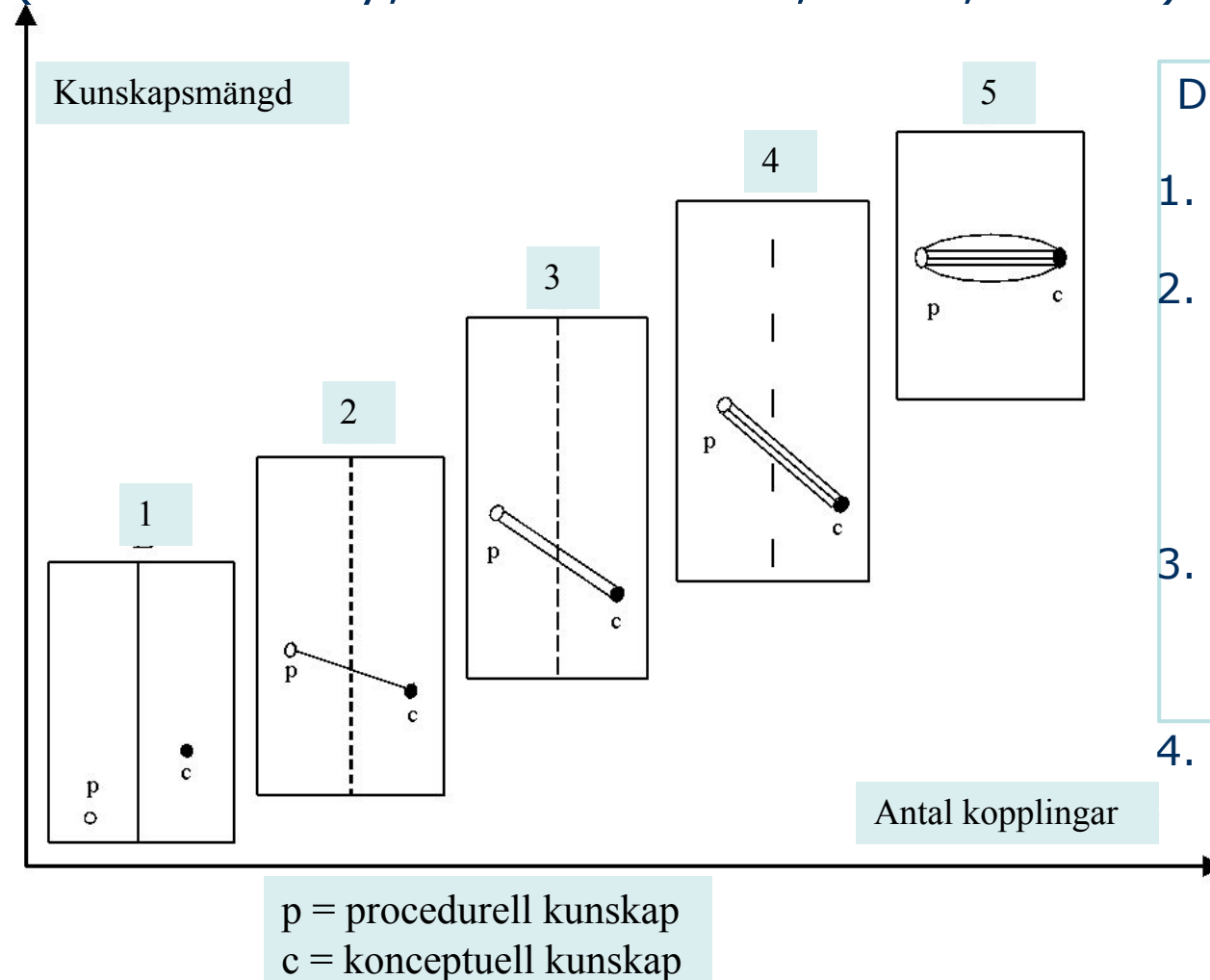


Modell för utveckling av procedurell och konceptuell kunskap

1. Berätta för varandra hur ni uppfattar Baroody, Johnsson & Feils modell för utveckling av procedurell och konceptuell kunskap.
2. Ge exempel på lärande enligt modellen.
3. Finns exempel som inte passar in i modellen?
4. Vad är kärnbudskapet i modellen?

Modell för utveckling av procedurell och konceptuell kunskap

(efter Baroody, Johnson & Feil, 2007, s. 124)



Diskutera:

1. Beskriv modellen.
2. Exempel på lärande enligt modellen.
3. Exempel som inte passar in.
4. Kärnbudskapet.

Sfards ramverk: Commognition

- En möjlighet att studera begreppsförståelse är genom en diskursanalys, t ex med Anna Sfards commognitiva ramverk (Sfard, 2008).
- **Commognition = communication + cognition**
- Kopplar ihop betydelsen av det sociala och kommunikationen med studera individualiserad kunskap.
- Ser tänkande som inre kommunikation.

Diskursens karakterisering

En matematisk diskurs karakteriseras enligt Sfard av:

Matematiska ord

Vilka ord använder
studenterna?

Visuella mediatorer

Vilka bilder används?
Ex: kurvor, formler

Narrativ

Vilka beskrivningar görs?
Vilka exempel väljs?

Rutiner

Vilka procedurer och
algoritmer används?

En studie av matematikstudenters uppfattningar av funktionsbegreppet

En *longitudinell studie* av studenters förståelse av ett matematiskt tröskelbegrepp.

Studiens syfte:

Att studera transformationen av studenters begreppsuppfattning, dvs. den process som sker då studenter passerar tröskelbegreppets tröskel.

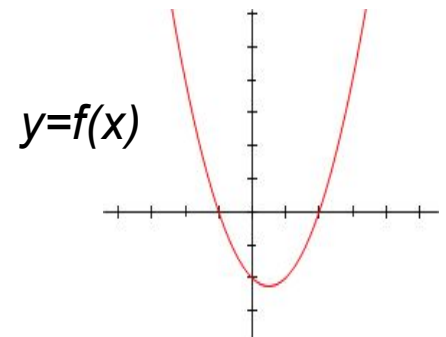
Begreppet funktion

- Det matematiska begreppet *funktion* är ett tröskelbegrepp (transformativt, svårt att lära, irreversibelt, integrativt, ...)
- Många vardagliga företeelser kan beskrivas med en funktion: mobilabonnemang, taxikostnad, kapitaltillväxt, ...
- Funktion är ett centralt begrepp i matematiken och används inom matematikens alla områden.

Definition: En **regel** som till varje x i en given definitionsmängd tillordnar *precis ett* y i en given mängd.

Definition: En **mängd av ordnade par** sådana att varje element x i definitionsmängden förekommer i *exakt ett* par (x, y) .

Funktion
≠ formel



Genomförande

- Studien följer studenter under en termin samt gör uppföljning en termin senare.
- Lärarstudenter som läser matematikkurser under sin andra termin (blivande matematiklärare år 7-9/gymnasiet).
- *Observation* av föreläsningar och övningar
- *Enkäter* till studenterna (3 tillfällen)
- *Intervjuer* med studenter (4 tillfällen)
- **Analys av fyra studenters utvecklingsprocess**
2019-06-16 Kerstin Pettersson
(Pettersson, Stadler & Tambour, 2013).

Studenternas användning av matematiska ord

Betydande utveckling - Anna och Dina

Använder matematiska ord redan i början av terminen och utökar tydligt sin repertoar under terminen

Ex: *"en variabel a beror på b "*

"för varje värde på x så finns ett värde y "

Marginell utveckling – Bosse och Cilla

Använder under hela året mestadels vardaglig diskurs och inkluderar endast ett fåtal matematiska ord

Ex: *"Jag skulle nog förklara det som ett samband mera, att det är nånting som ger nåt annat och som man eventuellt kan rita grafiskt"*

Studenternas användning av visuella mediatorer

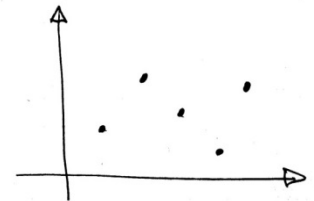
Används balanserat– Anna och Dina

Använder grafer och formler som visuella mediatorer. De används på ett självklart sätt men är inte dominanta i diskursen.

Ex: *"Priset för en taxiresa beror på hur långt (s)*

jag åker och hur lång tid (t) det tar, $p=as+bt$ ".

"Nu har jag lärt mig att även detta är en funktion"



Dominerar – Bosse och Cilla

Visuella mediatorer är mycket dominerande i diskursen.

Funktioner uppfattas främst som grafer.

Ex: *"...man känner sig lite osäker men så fort man kan visa*

Studenternas användning av narrativ

Mot formella uttryck – Anna och Dina

Utvecklas från vardagsexempel till formella uttryck inkluderande funktion som ordnade par.

Med stöd i det visuella – Bosse och Cilla

Narrativen tar starkt stöd i det visuella och utvecklas aldrig till formella uttryck. Endast obearbetade spår av abstrakt definition.

Studenternas användning av rutiner

Rutin för avgörande om funktion eller ej – Anna och Dina

Utvecklar rutin för att avgöra om en graf eller formel representerar en funktion eller inte.

Algebraiska rutiner – Bosse och Cilla

Utvecklar till viss del algebraiska rutiner för att undersöka funktioner men ingen rutin för att avgöra om något är en funktion.

Transformation av förståelse

Avgörande skillnader i studenternas diskursutveckling.

- **Anna och Dina** utvecklar sin diskurs på flera avgörande sätt:
 - narrativ förändras från vardagsexempel till funktion som ordnade par
 - använder visuella mediatorer på ett balanserat sätt
 - utvecklar rutin för att avgöra om funktion eller ej.
- **Bosse och Cilla** utvecklar inte sin diskurs på samma sätt:
 - inkluderar endast fåtal matematiska ord
 - visuella mediatorer dominerar starkt diskursen
 - narrativen utgår ofta från kurvor och formler
 - och är inte så tydligt strukturerad

Slutsatser

- Resultatet visar substantiella förändringar av förståelsen för de studenter som får goda examinationsresultat. De utökar och breddar sin användning av matematiska termer, bilder, beskrivningar och rutiner.
- Studenter vilkas förståelse inte förändrades lika tydligt uppvisade färre kopplingar mellan termer, bilder, beskrivningar och rutiner.

Diskussion

- Studien visar att transformation av förståelse tar lång tid och att studenterna behöver mycket stöd i processen.
- Möte med den formella matematiken räcker inte, innehållet måste bearbetas så studenten utökar sitt ordförråd, får en balanserad användning av visuella mediatorer och inkluderar formella delar i sina narrativ.

Att utveckla elevers begreppsförmåga

Ur grundskolans kursplan:

”Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla *förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp* och metoder och deras användbarhet.”

”Genom undervisningen i ämnet matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att [...]

- *använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp*”

Att utveckla elevers begreppsförmåga

Ur gymnasiets kursplaner:

”Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. *använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.”*

Begreppsförmåga är inte bara ordkunskap.

Det innefattar

- att använda begrepp
- att beskriva innebörden av begrepp (gy)
- att analysera begrepp (gr)
- samband mellan begrepp
- **förtrogenhet** med begrepp!

Hur kan vi skapa lärsituationer så att vi stödjer en
utveckling av elevernas begreppsförmåga?

Begreppsförmåga – en tröskel

- Fokus på tröskelbegrepp ger resultat!
- Utveckling av begreppsförståelse tar tid och eleverna behöver mycket stöd!
- Låt procedurella och konceptuella kunskaper utvecklas tillsammans!



A threshold concept can be considered as akin to a portal, opening up a new and previously inaccessible way of thinking about something. (Meyer & Land, 2003)



Kerstin Pettersson

Institutionen för matematikämnets och
naturvetenskapsämnenas didaktik
Stockholms universitet

kerstin.pettersson@mnd.su.se