

Kreativa matematiska resonemang förstärkta av testbaserat lärande

Att stärka lärande och minne



UMEÅ
UNIVERSITET



Lerbergsskolan
HÖGANÄS
KOMMUN



md
Mälardalens
universitet



SKOL
FORSKNINGS
INSTITUTET



HÖGSKOLAN
DALARNA



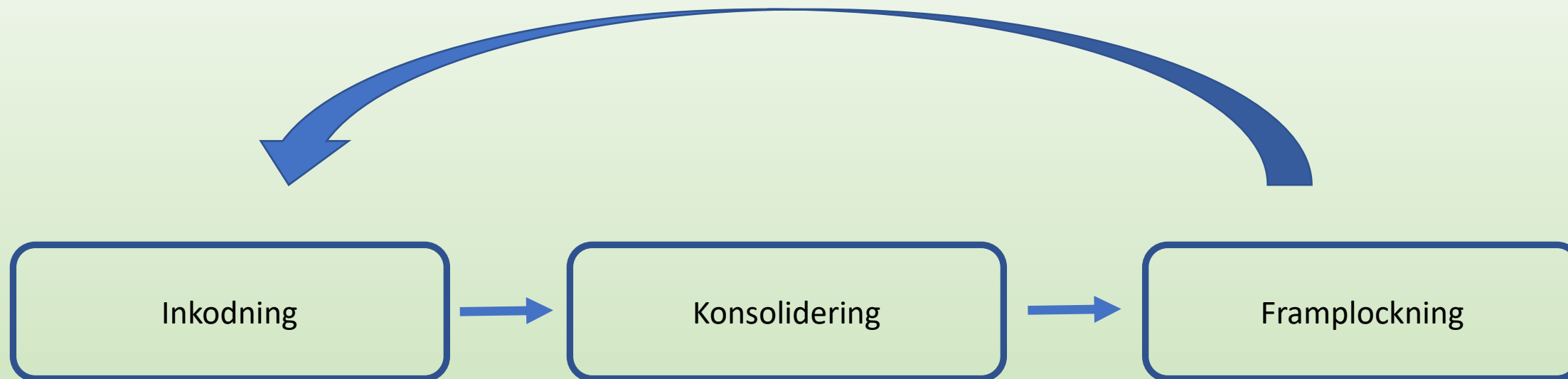
Övergripande problematik

Matematik är ett ämne som är rationellt och bygger på logik men,

Elever upplever ofta matematik som osammanhängande och ologiskt

Vilket kan bero på att matematiska områden undervisas som enskilda moment utan att elever får möjlighet att relatera till de kunskaper de redan har

Testbaserat lärande



Jonsson & Nyberg, 2021

Kreativa och algoritmiska resonemang

Resonemang är den tankekedja som vid lösning av en uppgift leder till och bedömer rimligheten i ett svar (Lithner, 2008)

Ett algoritmiskt resonemang innebär att den som löser uppgiften söker i minnet efter en procedur som antas lösa uppgiften. Argumenten för lösningen är ytliga eller saknas

Kreativa matematiska resonemang uppfyller tre kriterier:

- Eleven konstruerar en (för denne) ny lösningsmetod
- Argument för lösningsmetoden och lösningen formuleras
 - Argumenten förankras i matematik

Exempel på resonemang i samband med uppgiften "Skriv $3^4 \times 3^3$ som en potens"

"Hur var det nu, skulle man addera 4 och 3 och sedan låta 3:an stå kvar, alltså 3^7 "

Eller

"Hur var det nu, 3^4 betyder $3 \times 3 \times 3 \times 3$ och 3^3 betyder $3 \times 3 \times 3$. Alltså blir det tillsammans $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ och det är 3^7 . Man kan alltså addera 4 och 3 och låta 3:an stå kvar"

Utifrån detta har en forskargrupp vid Umeå universitet i kvantitativa studier jämfört lärande hos elever som antingen löser uppgifter genom algoritmiska resonemang eller kreativa matematiska resonemang.

Standarupplägg för studier av lärande genom resonemang

60 elever övar på
uppgifter som kan
lösas genom AR

60 elever övar på
uppgifter som kräver
CMR

Alla 120 elever gjorde
samma eftertest

Exempel på uppgifter

When squares are put in a row it looks like the figure to the right.



If x is the number of squares then the number of matches y can be calculated by the function $y=3x+1$

Example: If 4 squares are put in a row then $y=3x+1=3\cdot 4+1=13$ matches are needed.

How many matches are needed to get 50 squares in a row?

When squares are put in a row it looks like the figure to the right.

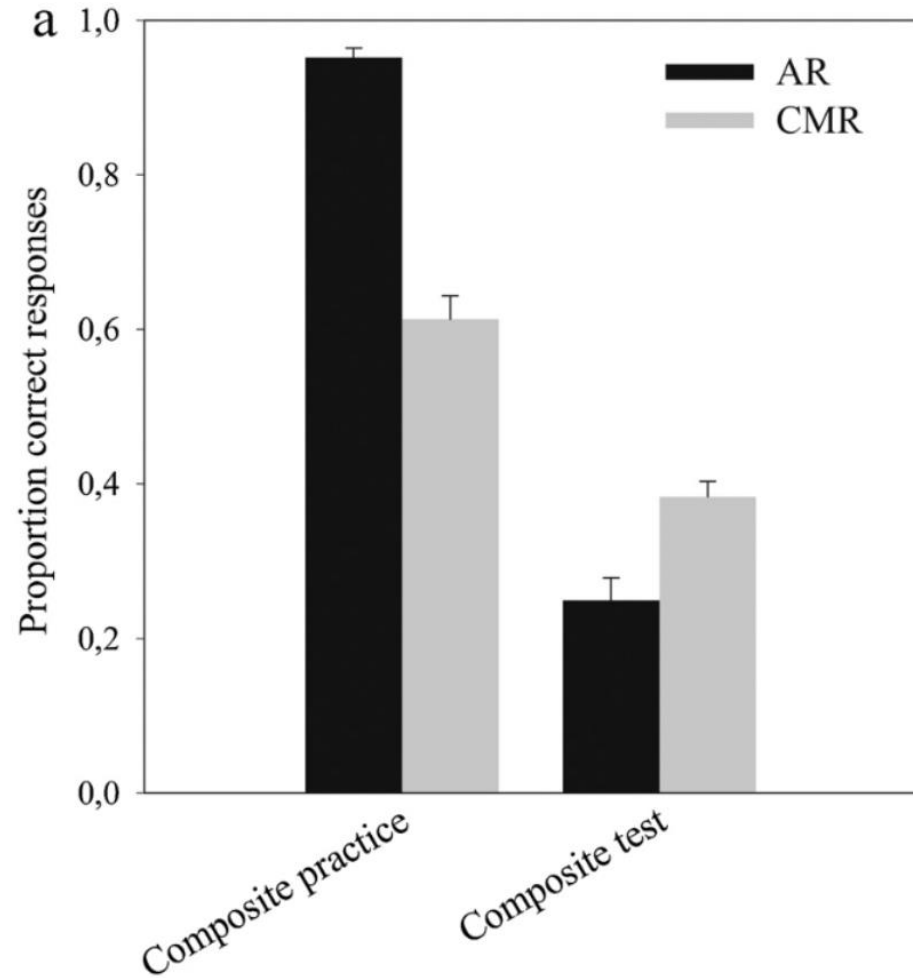


If x is the number of squares then the number of matches y can be calculated

Example: If 4 squares are put in a row then 13 matches are needed.

How many matches are needed to get 50 squares in a row?

Exempel på resultat



- De som övade på AR-uppgifter klarade ungefär 95% av alla övningsuppgifter
- Av de som övade på CMR-uppgifter klarade ungefär 60% av alla uppgifter
- I eftertestet klarade CMR-eleverna ungefär 40% av uppgifterna medan AR-eleverna klarade ungefär 20% av uppgifterna

Utmaning: Hur får man fler elever att klara av att lösa CMR-uppgifter vid övningstillfället?

Jonsson, Norqvist, Liljekvist & Lithner, 2014

Matematik som vetenskap bygger på att nya insikter förklaras med stöd i det man redan vet

Att lära sig matematik genom problemlösning bygger på samma idé, att med stöd av förkunskaper förstå och förklara den nya matematik man möter

Att lösa ett matematiskt problem innebär att med stöd av sina matematiska kunskaper konstruera en lösning som inte är känd i förväg

Omkrets - cirkel

1. Öppna <https://ggbm.at/qJtcamNS>
2. Gör fem olika cirklar och skriv ner diametern och omkretsen i tabellen nedan.

Diameter	Omkrets

3. Räkna ut förhållandet mellan omkrets och diameter från tabellen ovan. Fyll i tabellen nedanför.

Diameter	Omkrets	Förhållande

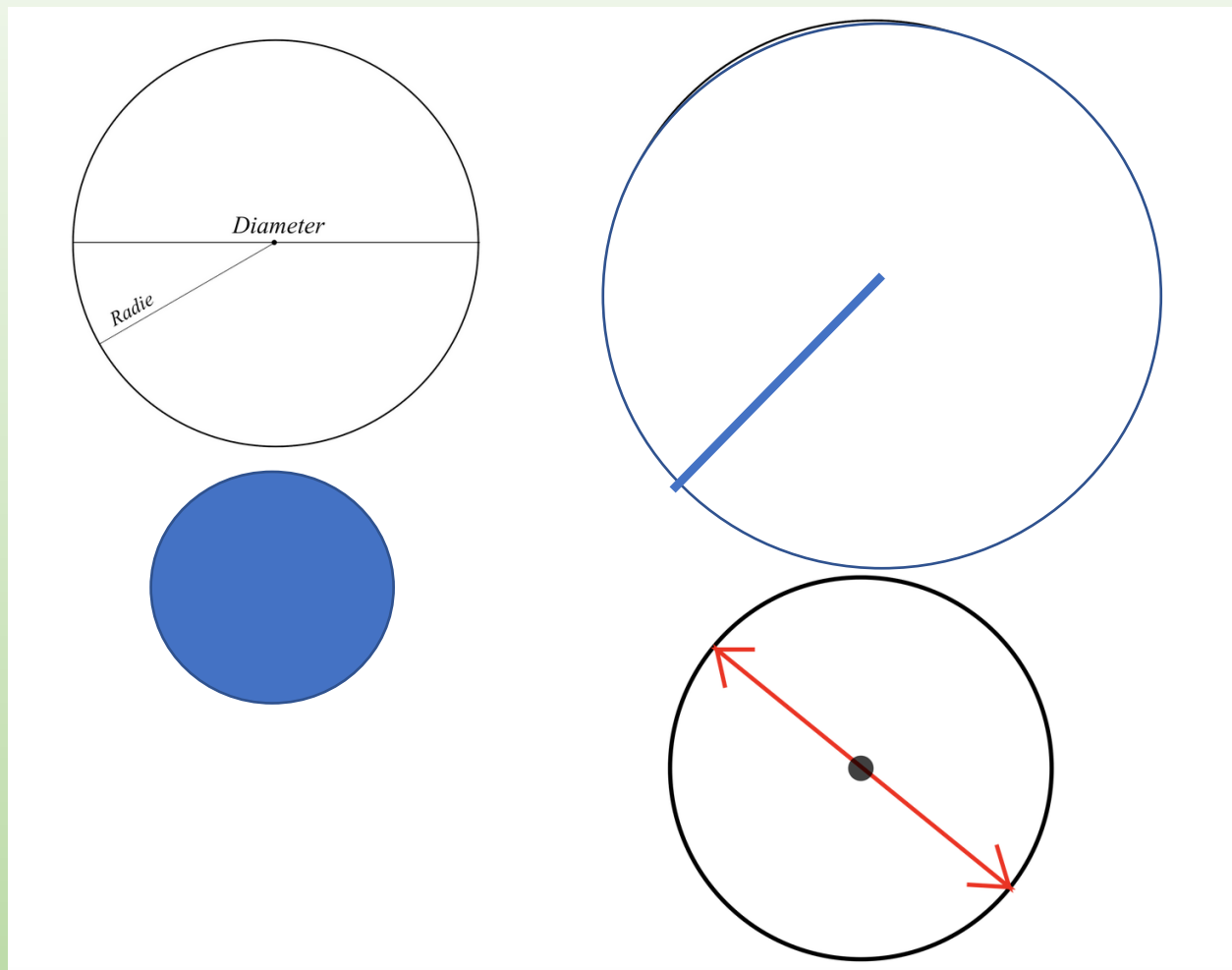
4. Vad kan du säga om förhållandet mellan omkrets och diameter?

6. Berätta hur du räknar ut omkretsen på en cirkel. Förklara hur du tänker.

5. Hur kan man använda det du kommit fram till i 4?

- Om du vet diametern, hur kan du räkna ut omkretsen?
- Om du vet omkretsen, hur kan du räkna ut diametern?

Vilken är omkretsen på cirklarna nedan?



Kritik mot att lära sig genom problemlösning är:

- Problemlösning där elever ska konstruera egna lösningar med stöd av deras tidigare matematikkunskaper kan överbelasta arbetsminnet
- Det man lär sig först skapar en stark minnesstruktur, även om det är fel eller inte enligt konventioner. Den kan vara svår att "byta ut"

Samtidigt har empirisk forskning visat att:

- De som framgångsrikt konstruerar egna lösningar på uppgifter minns bättre och kan använda den matematik de lär sig i större utsträckning än de som löser samma uppgifter med hjälp av metoder som de får av läraren och/eller instruktionerna för uppgiften

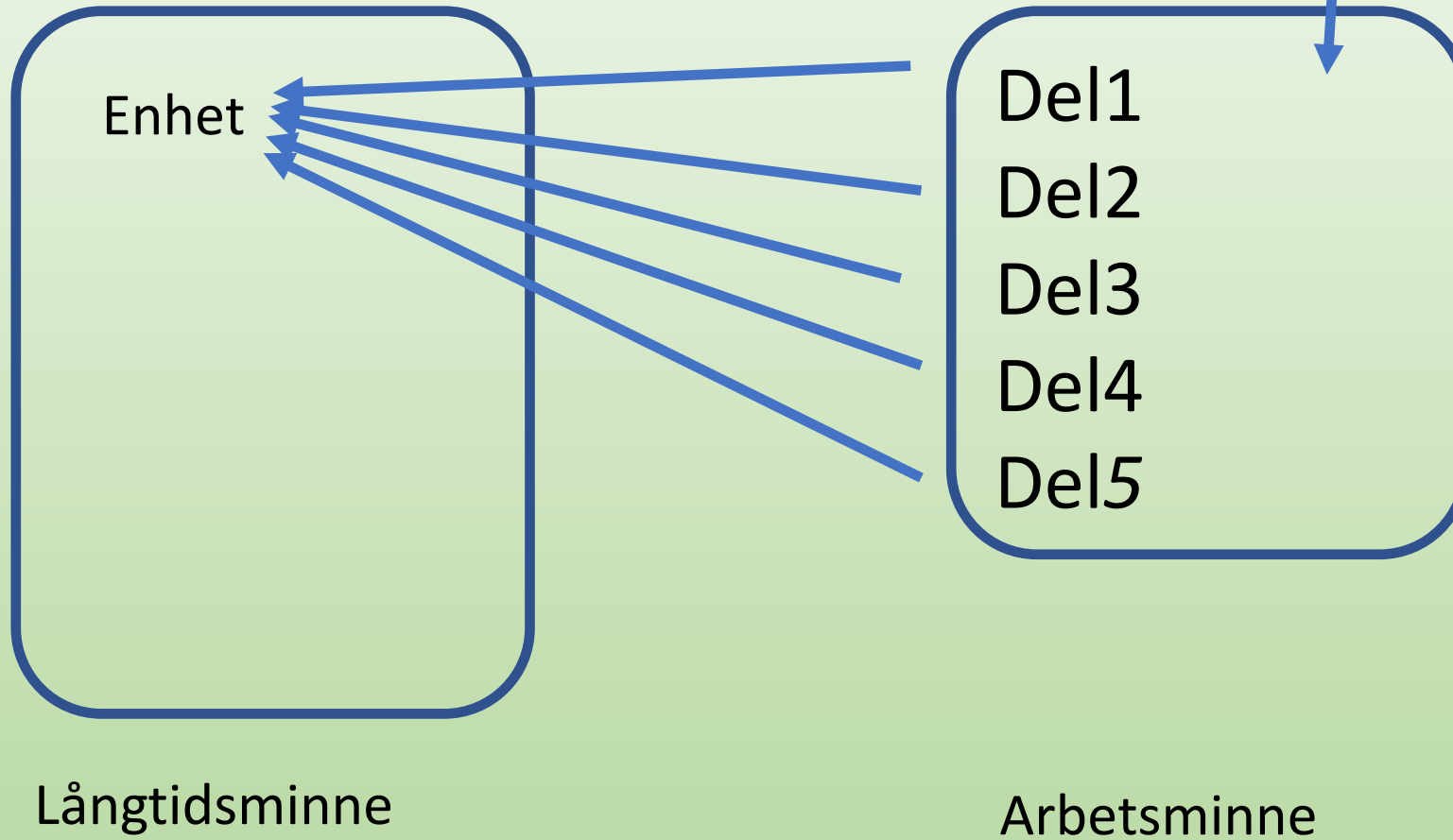
0736567739

Räkna baklänges från
100 tre i taget tills du
kommer under 70

29717328559

Räkna baklänges från
100 tre i taget till du
kommer under 70

Instruktioner för lärandeuppgift –
extern information



Instruktioner för lärande uppgift

Enhet1

Del6

Del7

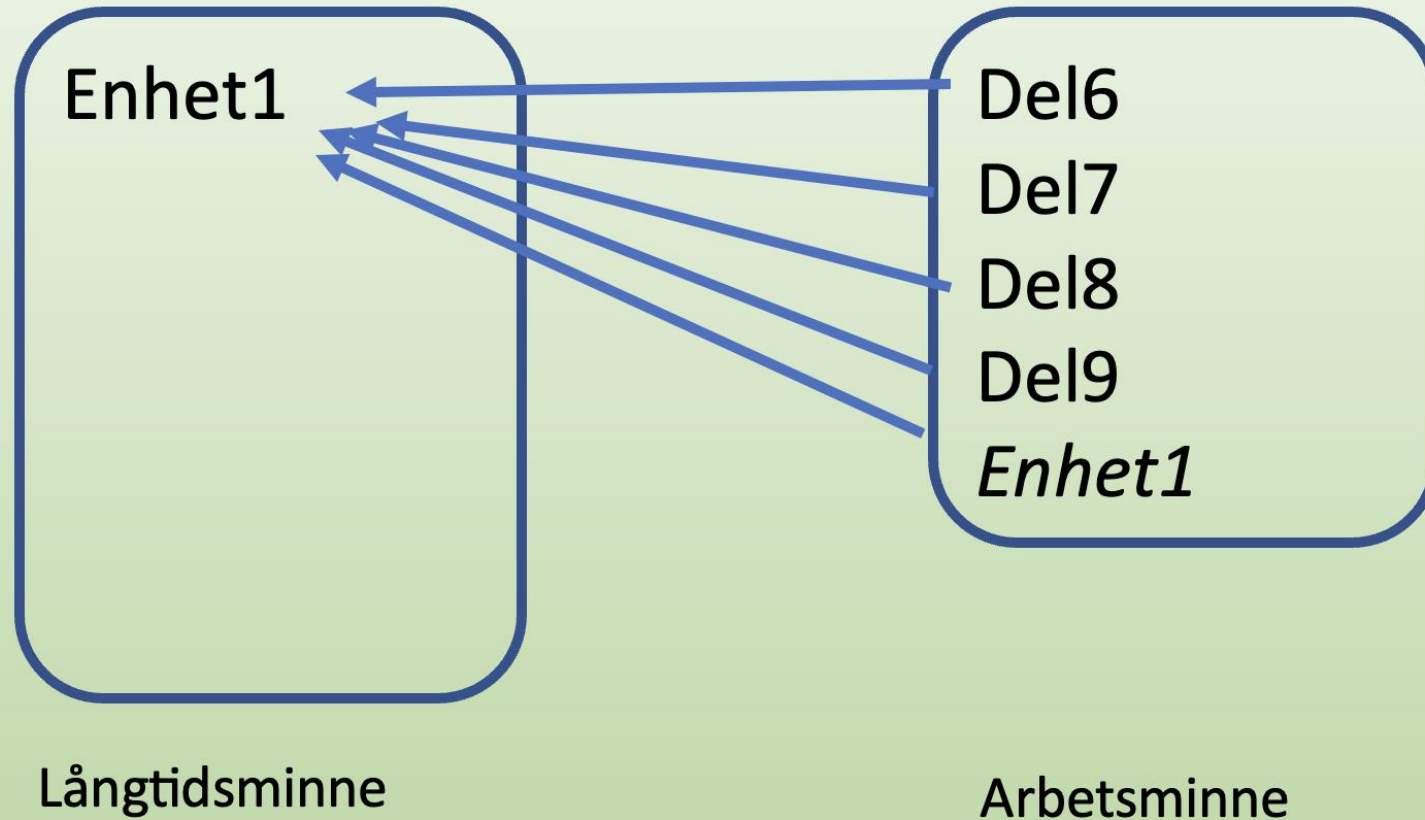
Del8

Del9

Enhet1

Långtidsminne

Arbetsminne



Dilemma

Kritik mot undervisning där lärandet är tänkt att ske genom problemlösning är:

- Problemlösning där elever ska konstruera egna lösningar med stöd av deras tidigare matematikkunskaper kan överbelasta arbetsminnet
- Det finns en risk att lära sig fel. Det man lär sig först skapar den starkaste minnesstrukturen, även om det är fel eller inte enligt konventioner.

Samtidigt har empirisk forskning visat att:

- Elever som framgångsrikt konstruerar egna lösningar på uppgifter minns bättre och kan använda den matematik de lär sig i större utsträckning än elever som löser samma uppgifter med hjälp av metoder som de får av läraren och/eller instruktionerna för uppgiften

Omkrets - cirkel

1. Öppna <https://ggbm.at/qJtcamNS>
2. Gör fem olika cirklar och skriv ner diametern och omkretsen i tabellen nedan.

Diameter	Omkrets

3. Räkna ut förhållandet mellan omkrets och diameter från tabellen ovan. Fyll i tabellen nedanför.

Omkrets/
diameter

Diameter	Omkrets	Förhållande

4. Vad kan du säga om förhållandet mellan omkrets och diameter?

6. Berätta hur du räknar ut omkretsen på en cirkel. Förklara hur du tänker.

5. Hur kan man använda det du kommit fram till i 4?

- Om du vet diametern, hur kan du räkna ut omkretsen?
- Om du vet omkretsen, hur kan du räkna ut diametern?

Eleverna behöver använd kunskaper om relationen mellan multiplikation och division

För att underlätta problemlösningen med avseende på arbetsminnet:

Eleverna aktiverar och plockar fram de kunskaper de behöver under en lektion innan de lär sig nytt. Lära-nytt lektionen inleds med en kort framplockning av det de arbetat med föregående lektion

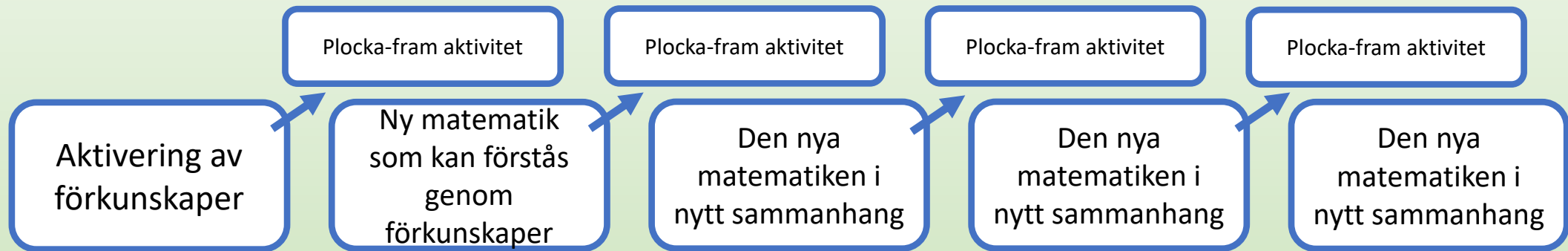
För att undvika att elever lär sig fel:

Utforma de avgörande momenten där eleverna inte själva kan kontrollera om de gör rätt så att risken för fel minimeras

Möjlig utmaning:

När eleverna har befast kunskapen att $O = \text{Diametern} \times \pi$, fråga om det går att använda det omvända förhållandet, det vill säga diametern/omkretsen för att göra beräkningar av omkrets och diameter

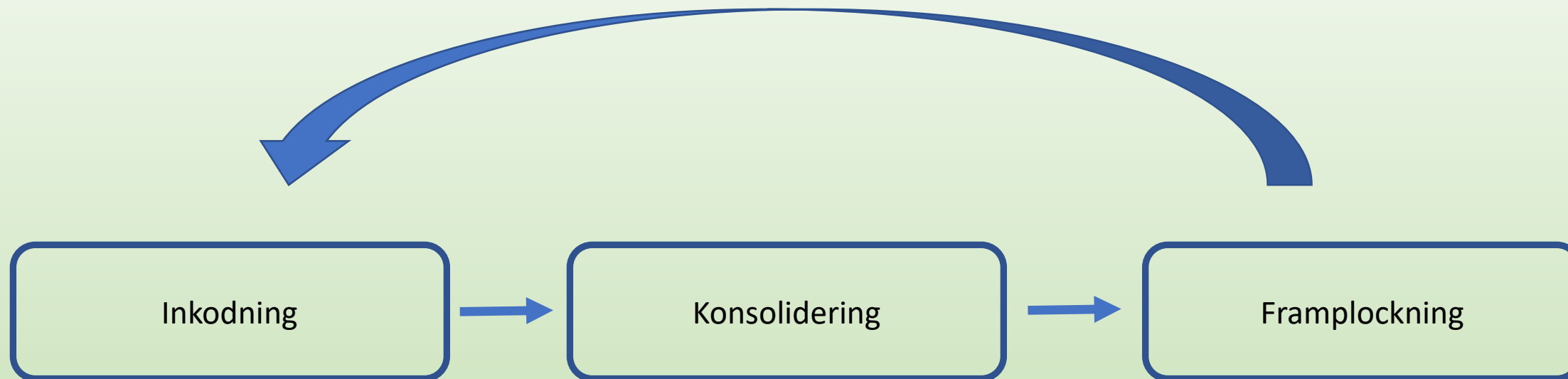
Prototyp för undervisning



Uppgifter för aktivering av förkunskaper och lärande av ny matematik – Eleverna måste konstruera och argumentera för lösningar

Plocka-fram aktivitet - Eleverna plockar aktivt fram det de lärt sig under föregående lektion

Testbaserat lärande



Jonsson & Nyberg, 2021

Vilka effekter kan undervisning för kreativa resonemang och testbaserat lärande ha på elever med avseende på matematikängslan?

Publikationer

- Olsson, J., & Granberg, C. (2022). Teacher-student interaction supporting students' creative mathematical reasoning during problem solving using Scratch. *Mathematical Thinking and Learning*, (First published on-line), 1-28. <https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2105567>.
- Olsson, J., & D'Arcy, D. (2022). Students' reasoning and feedback from a teacher. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 27 (1), 27–49. http://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2022/02/27_1_027050_olsson.pdf.
- D'Arcy, D., & Olsson, J. (2021). *Kreativa resonemang i matematikundervisningen – Forskningsrön i praktiken*. Lund: Studentlitteratur.
- Teledahl, A., & Olsson, J. (2021). Students' use of written and illustrative information in mathematical problem solving. In L. Björklund Boistrup, J. Häggström, Y. Liljeqvist, & O. Olande (Eds.), *Sustainable mathematics education in a digitalized world. MADIF 12, Proceedings of MADIF 11*, (pp. 173-182). Växjö: Linnéuniversitetet. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1541464/FULLTEXT01.pdf>.
- Teledahl, A., & Olsson, J. 2020. Feedback for creative reasoning. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3794-3801). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02430229>.
- D'Arcy, D., & Olsson, J. (2019). Att undervisa matematik för kreativa resonemang. *Nämna: tidskrift för matematikundervisning*, (4), 23–31. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1544330/FULLTEXT01.pdf>.
- D'Arcy, D. (2019). *Kreativa resonemang på mellanstadiet*. Rapport. Malmö universitet. <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1410514/FULLTEXT01.pdf>.
- Olsson, J., & Teledahl, A. (2018). Feedback to encourage creative reasoning. In J. Häggström, Y. Liljeqvist, J. Bergman Ärleback, M. Fahlgren, & O. Olande (Eds.), *Perspectives on professional development of mathematics teachers. Proceedings of MADIF 11*, (pp. 141-150). Gothenburg, Sweden: SMDF. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1274151/FULLTEXT01.pdf>.
- D'Arcy, D. (2016). *Hur feedback på uppgiftsnivå och processnivå kan skilja elevers resonemang åt i matematik: En empirisk undersökning om hur elevers resonemang skiljer sig åt beroende på vilken feedback som ges*. Examensarbete avancerad nivå. Högskolan Dalarna. <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:925859/FULLTEXT02.pdf>.

Projekt Skolforskningsinstitutet

[Kreativa matematiska resonemang förstärkta av Testbaserat lärande](#)

Kreativa resonemang i matematikundervisningen – Forskningsrön i praktiken. Lund: Studentlitteratur.



Forskningsprojekt: Kreativa matematiska resonemang förstärkta av testbaserat lärande

Projektledare [Jan Olsson](#)

Deltagare Ann-Sofie Persberg
Denice D'Arcy
Carina Granberg, Umeå universitet
Maria Larsson, Mälardalens universitet
Lena Salomonsson
Johanna Talberg

Projektperiod 2023-01-01 - 2025-12-31

Projektstatus Pågående

<https://www.skolfi.se/forskningsfinansiering/finansierade-forskningsprojekt-2022/kreativa-matematiska-resonemang-forstarkta-av-testbaserat-larande/>